



# Variations autour de formes irrégulières et optimales

Jimmy Lamboley

## ► To cite this version:

Jimmy Lamboley. Variations autour de formes irrégulières et optimales. Mathématiques [math]. École normale supérieure de Cachan - ENS Cachan, 2008. Français. NNT: . tel-00346316

**HAL Id: tel-00346316**

**<https://theses.hal.science/tel-00346316>**

Submitted on 11 Dec 2008

**HAL** is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

**THÈSE DE DOCTORAT  
DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE CACHAN**

Présentée par

**Jimmy Lamboley**

pour obtenir le grade de

**DOCTEUR DE L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE  
CACHAN**

Domaine :

**Mathématiques**

Sujet de la thèse :

**Variations autour de  
Formes irrégulières et optimales**

---

à soutenir devant le jury composé de

D. Bucur	Professeur à l'université de Savoie	Rapporteur
P. Freitas	Professeur à l'université technique de Lisbonne	Rapporteur
P. Cardaliaguet	Professeur à l'université de Brest	Examineur
F. Gazzola	Professeur à Politecnico di Milano	Examineur
A. Henrot	Professeur à l'école des Mines de Nancy	Examineur
M. Pierre	Professeur à l'antenne de Bretagne de l'ENS Cachan	Directeur

---

IRMAR, UMR 6625 du CNRS  
Antenne de Bretagne de l'École Normale Supérieure de Cachan  
Avenue Robert Schuman, 35170, BRUZ



# Table des matières

<b>Table des matières</b>	<b>1</b>
<b>Introduction</b>	<b>5</b>
<b>Notations</b>	<b>21</b>
<b>1 Structure des dérivées de forme autour d'ensembles à périmètre fini</b>	<b>25</b>
1.1 Définitions, motivations . . . . .	25
1.1.1 Ensemble à périmètre fini . . . . .	25
1.1.2 Propriété de structure des dérivées de forme . . . . .	26
1.1.3 Exemples de dérivées de forme . . . . .	27
1.2 Cas d'ensembles irréguliers . . . . .	29
1.2.1 Cas général . . . . .	29
1.2.2 Cas des ensembles à périmètre fini . . . . .	29
1.2.3 Quelques exemples . . . . .	32
1.3 Notion de positivité des dérivées de forme . . . . .	34
1.3.1 Définition . . . . .	35
1.3.2 Positivité implique continuité . . . . .	35
1.3.3 Contre-exemple . . . . .	36
1.3.4 Périmètre autour d'un ensemble convexe, ou pseudo-convexe . . . . .	37
1.3.5 Autres exemples . . . . .	39
1.3.5.1 Intégrales sur le bord . . . . .	39
1.3.5.2 Énergie de Dirichlet . . . . .	39
1.4 Résultats partiels sur la structure des dérivées secondes . . . . .	41
1.4.1 Cas d'un point critique . . . . .	41
1.4.2 Cas régulier . . . . .	42
1.5 Quelques résultats de régularité . . . . .	44
1.5.1 Le problème de Cheeger . . . . .	44
1.5.2 Forme d'une goutte en électromouillage . . . . .	46
<b>2 Optimisation de forme sous contrainte de convexité</b>	<b>49</b>
2.1 Introduction . . . . .	49
2.2 Main results . . . . .	50
2.3 First and second order optimality conditions . . . . .	53
2.4 Proofs . . . . .	57
2.4.1 Proof of Theorem 2.2.1, case of inclusion in $A(a, b)$ . . . . .	57
2.4.2 Proof of Theorem 2.2.1, case of volume constraint . . . . .	59
2.4.3 Proof of Theorem 2.2.2 . . . . .	60
2.4.4 Proof of Theorem 2.2.3 . . . . .	62
2.5 Sharpness of conditions . . . . .	65
2.5.1 Counterexamples for Theorem 2.2.2 . . . . .	65
2.5.2 Counterexamples for Theorem 2.2.3 . . . . .	66

<b>3</b>	<b>Optimisation de forme pour les valeurs propres</b>	<b>67</b>
3.1	Définitions et résultats généraux . . . . .	67
3.2	Minimisation de $\lambda_1$ : régularité à l'intérieur de la boîte . . . . .	69
3.2.1	Introduction and main results . . . . .	69
3.2.2	Proof of Theorem 3.2.2 . . . . .	72
3.2.3	Proof of Theorem 3.2.1 . . . . .	78
3.2.4	Appendix . . . . .	82
3.3	Minimisation de $\lambda_2$ sous contrainte de convexité . . . . .	83
3.3.1	Les résultats de A. Henrot et E. Oudet . . . . .	83
3.3.2	A propos de l'hypothèse de régularité (3.36) . . . . .	86
3.3.2.1	Les résultats . . . . .	86
3.3.2.2	Preuve de la continuité du gradient . . . . .	87
3.3.2.3	Preuve du théorème 3.5 . . . . .	88
3.3.3	A propos de l'hypothèse géométrique (3.37) . . . . .	91
3.4	Minimisation de $\lambda_1$ : régularité au bord de la boîte . . . . .	93
3.4.1	Résultat de non-régularité $\mathcal{C}^2$ . . . . .	94
3.4.2	Régularité de la forme optimale . . . . .	97
3.5	Simulations numériques . . . . .	97
<b>4</b>	<b>Problèmes elliptiques surdéterminés</b>	<b>105</b>
4.1	Quelques exemples de non-unicité . . . . .	106
4.1.1	Introduction . . . . .	106
4.1.2	Counterexamples using shape optimization . . . . .	107
4.1.3	Counterexamples via explicit construction . . . . .	109
4.1.3.1	A counterexample in an interior domain . . . . .	109
4.1.3.2	A counterexample in an exterior domain . . . . .	110
4.2	Régularité . . . . .	111
4.2.1	Régularité de la partie surdéterminée . . . . .	112
4.2.2	Régularité des recollements . . . . .	113
	<b>Perspectives</b>	<b>115</b>
	<b>Bibliographie</b>	<b>124</b>

*Qui vit sans folie n'est pas si sage qu'il croit.*

François de la Rochefoucauld

*Je ne suis pas encore allé(e) partout,  
mais c'est sur ma liste.*

Susan Sontag

*L'intelligence, ça n'existe pas.  
C'est une invention des gens méchants,  
pour se donner bonne conscience.*



# Introduction

Cette thèse s'inscrit dans le domaine des mathématiques appelé **Optimisation de forme**. Plus spécifiquement, on s'est attaché aux difficultés liées à l'écriture des conditions d'optimalité, et à leurs utilisations. Les deux obstacles majeurs qui ont été analysés sont les suivants :

- gérer des formes dont on ne connaît pas a priori la **régularité**,
- gérer des **contraintes géométriques fortes**, c'est-à-dire qui ne permettent que très peu de variations pour écrire l'optimalité (par exemple la **convexité**).

Dans cette introduction, nous commençons par établir le cadre général de l'optimisation de forme, et par motiver la question de la régularité des formes optimales. Nous décrivons ensuite les résultats obtenus dans les quatre chapitres de cette thèse :

- le premier vise à établir un cadre de différentiation de forme valable pour des formes presque sans régularité a priori,
- le chapitre 2 s'attache à l'analyse des conditions d'optimalité sous contrainte de convexité, en dimension 2, et leurs applications à une classe de problèmes où les formes optimales sont nécessairement des polygones,
- le troisième chapitre se focalise sur deux problèmes classiques de l'optimisation de forme des valeurs propres du laplacien, qui montrent bien les deux types de difficultés évoquées ci-dessus. On y démontre des résultats de régularité, et aussi de non-régularité, des formes optimales pour ces problèmes ; on obtient des limites de régularité en  $C^{1, \frac{1}{2}}$  qui sont nouvelles et optimales,
- le dernier chapitre est motivé par la question des problèmes elliptiques partiellement surdéterminés, et on construit des contre-exemples liés à l'optimisation de forme.

## Optimisation de forme

De manière très générale, un problème d'optimisation de forme se formule de la manière suivante : on se donne un ensemble de formes admissibles, c'est-à-dire une famille  $\mathcal{F}_{ad}$  de parties de  $\mathbb{R}^d$ , où  $d \in \mathbb{N}^*$  est la dimension du problème considéré (souvent  $d \geq 2$ ), et une fonctionnelle de forme, c'est-à-dire une fonction  $J : \mathcal{F}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$ , qui est le plus souvent une fonctionnelle d'énergie issue d'une modélisation physique. On minimise alors la fonctionnelle de forme, dans l'ensemble des formes admissibles, c'est-à-dire :

$$\text{trouver } \Omega^* \in \mathcal{F}_{ad} \text{ tel que } J(\Omega^*) = \min_{\Omega \in \mathcal{F}_{ad}} J(\Omega). \quad (1)$$

On *étudie* donc une forme  $\Omega^*$ , admissible et d'énergie minimale parmi les formes admissibles.

Cette *étude* soulève les questions mathématiques suivantes :

- existence d'une forme optimale,
- propriétés des formes optimales,
- calcul effectif ou approché des formes optimales.

Lors d'une telle démarche, une question supplémentaire se révèle indispensable à la compréhension mathématique du problème, à savoir : **quelle est la régularité des formes optimales ?**



## L'importance de la régularité

Pour résoudre la question de l'existence de formes optimales, on est amené à choisir une topologie sur  $\mathcal{F}_{ad}$  qui apporte de la compacité, tout en conservant la continuité (ou plus généralement la semi-continuité inférieure) de la fonction  $J$  (ces deux requêtes sont antagonistes).

Une première méthode pour résoudre cette difficulté consiste à imposer artificiellement une certaine régularité aux formes admissibles (par exemple la propriété du  $\varepsilon$ -cône, pour un  $\varepsilon > 0$  fixé). Mais cette méthode n'est pas très naturelle, puisqu'elle consiste à rajouter une contrainte dans l'ensemble des formes admissibles, donc à occulter une partie d'entre elles ; de plus, il sera ensuite difficile d'obtenir des informations sur la forme optimale, par exemple pour écrire des conditions d'optimalité : en effet, il faudrait démontrer qu'on ne "sature" pas ladite contrainte, ce qui est, en fait, un résultat de régularité.

Une seconde méthode, plus délicate mais plus pertinente, consiste au contraire à considérer une très large classe d'ensembles, parfois même plus grande que le choix initial de  $\mathcal{F}_{ad}$  (ce qui nécessite de prolonger  $J$  sur cette nouvelle classe), sur laquelle on met une topologie rendant naturellement la fonction  $J$  continue. On peut citer d'ores et déjà deux classes qui interviennent fréquemment en optimisation de forme : les ensembles à périmètre fini (introduits pour les problèmes isopérimétriques, c'est-à-dire quand  $J$  est une fonction du type périmètre), et les ensembles quasi-ouverts (introduits pour les fonctions  $J$  faisant intervenir une fonction d'état  $u_\Omega$  solution d'une EDP elliptique sur un domaine  $\Omega$ ). Ce faisant, on obtient l'existence d'une forme optimale  $\Omega^*$ , a priori sans régularité. Mais afin d'avancer dans l'analyse, c'est-à-dire pour la seconde étape de la démarche, on a en général besoin de régularité.

Le problème de la régularité a donc pour but de combler le fossé créé par les méthodes mathématiques utilisées, d'une part pour l'existence d'une forme optimale, et d'autre part pour l'analyse de ses propriétés. Une autre raison à l'importance de cette analyse, que nous ferons ressortir dans ce travail, est qu'il existe des problèmes d'optimisation pour lesquels les formes optimales ne sont pas régulières (ou pas très régulières) ; il faut alors analyser cette non-régularité, et tenir compte de celle-ci pour la suite de l'analyse.

Les questions traitées dans cette thèse sont motivées par cette problématique de la régularité.

## Chapitre 1 :

### Structure des dérivées de forme autour d'ensembles à périmètre fini

Afin d'obtenir des informations sur une forme optimale, un outil fondamental de la théorie de l'optimisation consiste à écrire des conditions d'optimalité (d'ordre 1, voire d'ordre 2). Il faut néanmoins préciser ce qu'on entend par là, puisque  $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$  (ensemble des parties de  $\mathbb{R}^d$ ) n'a pas de structure naturelle d'espace vectoriel ou de variété. Nous nous sommes concentrés sur la notion de dérivée de forme que nous rappelons brièvement ici : étant donné un domaine  $\Omega \in \mathcal{F}_{ad}$ , on peut restreindre  $J$  à l'ensemble  $\{\Omega_\theta := (Id + \theta)(\Omega) / \theta \in \Theta\}$  paramétré par l'espace de Banach  $\Theta = \{\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \theta \text{ est } \mathcal{C}^1, \theta \text{ et } D\theta \text{ sont bornés}\}$  (muni de sa norme habituelle). Dans le cas où la fonction  $J$  est définie en  $\Omega_\theta$  pour tout  $\theta$  petit dans  $\Theta$ , on peut définir, sur un voisinage de 0,  $\mathcal{J}_\Omega(\theta) := J(\Omega_\theta) = J((Id + \theta)(\Omega))$  et ainsi définir une notion de différentiabilité pour  $\mathcal{J}_\Omega$ . Lorsque  $\mathcal{J}_\Omega$  est (Fréchet-)différentiable en 0 dans  $\Theta$ , on dit que  $J$  est dérivable au sens des formes en  $\Omega$ , et  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est sa dérivée de forme.

Les fonctions  $J$  que nous manipulerons sont essentiellement de trois types, bien représentés par les exemples suivants :  $|\Omega|$  = volume de  $\Omega$ ,  $P(\Omega)$  = périmètre de  $\Omega$ , et  $J(\Omega)$  = énergie de Dirichlet de  $\Omega$  pour un second membre  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ , (voir paragraphe 1.1.3 pour les définitions complètes). Pour ces fonctions, cette propriété de différentiabilité est valable pour tout domaine  $\Omega$ , donc en particulier **sans condition de régularité** (même si l'écriture habituelle de leurs dérivées, elle, nécessite un peu de régularité, puisqu'elle requiert en général une intégration par parties).

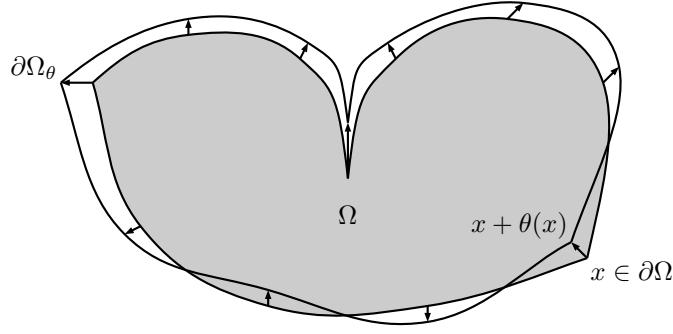


FIG. 1 – Perturbation régulière d'une forme irrégulière

Néanmoins, les résultats généraux sur les dérivées de forme sont habituellement établis pour des domaines réguliers. Le premier de ces résultats est le théorème de structure de Hadamard. Celui-ci tire parti de la forme particulière de la fonction  $\mathcal{J}_\Omega$ , c'est-à-dire utilise le fait que  $\mathcal{J}_\Omega(\theta)$  ne dépend que de la forme de  $\Omega_\theta$ . Il établit que la fonction  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \in \Theta'$  a la structure suivante :

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_{\partial\Omega} \cdot \nu_\Omega), \quad (2)$$

où  $\nu_\Omega$  est le vecteur normal extérieur défini sur  $\partial\Omega$ , et  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_J^\Omega$  est une forme linéaire continue sur  $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ . Ce résultat est valable pour tout domaine  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ , et pour toute fonction de forme  $J$  différentiable au sens des formes autour de  $\Omega$ . Cet objet  $\mathcal{L}$  est fondamental pour comprendre les dérivées de forme, car c'est lui (plutôt que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$ ) qui contient l'information de la dérivée de  $J$ .

On voit apparaître ici le fossé précédemment évoqué dans notre introduction : l'objet  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est en général défini pour tout  $\Omega$ , alors que ses propriétés sont établies sous réserve de régularité.

Dans ce premier chapitre, nous remédions à ce manque.

Dans la formule (2), le seul objet nécessitant de la régularité pour être défini classiquement est le vecteur normal. Mais avec la théorie géométrique de la mesure, on sait définir ce dernier de manière satisfaisante pour tout domaine  $\Omega$  appartenant à la classe des ensembles à périmètre fini, dont on a déjà rappelé l'importance en optimisation de forme (dans ce cas, on note encore  $\nu_\Omega$  le vecteur normal extérieur, défini en tant qu'élément de  $L^\infty(\partial^*\Omega, \mathcal{H}^{d-1})$ , où  $\partial^*\Omega \subset \partial\Omega$  est le *bord réduit* de  $\Omega$ , et  $\mathcal{H}^{d-1}$  est la mesure de Hausdorff de dimension  $d - 1$  dans  $\mathbb{R}^d$ ). Ainsi, nous démontrons dans ce travail le résultat suivant :

**Théorème 0.1 (Paragraphe 1.2.2)** *Soit  $\Omega$  un ensemble à périmètre fini, et  $\Gamma = \partial^*\Omega$  son bord réduit. Alors, il existe une structure d'espace de Banach sur  $X := \{\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega / \xi \in \Theta\}$  telle que, pour toute fonctionnelle de forme  $\mathcal{J}_\Omega$  différentiable en  $\theta = 0$ , et vérifiant*

$$\text{pour tout } \theta_1, \theta_2 \in \Theta \text{ petit, } \left[ \Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2} \text{ p.p.} \right] \Rightarrow \left[ \mathcal{J}_\Omega(\theta_1) = \mathcal{J}_\Omega(\theta_2) \right], \quad (3)$$

*on a la structure*

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega), \quad (4)$$

*où  $\mathcal{L}$  est une forme linéaire continue sur  $X$ .*

L'hypothèse (3) est naturelle dans ce cadre de théorie de la mesure, puisqu'on travaille avec des classes d'ensembles, définies aux ensembles de mesure nulle près. Elle est vérifiée pour les fonctions volume et périmètre. Quant aux fonctions dépendant de  $u_\Omega$ , solution d'une EDP elliptique sur  $\Omega$ , on peut les redéfinir de manière à ce qu'elles satisfassent (3), cette nouvelle définition étant alors égale à la fonction initiale sous réserve d'une faible condition de régularité sur  $\Omega$  (voir paragraphe 1.3.5.2).

Le théorème précédent généralise bien le cas régulier ( $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ), car alors  $X = \mathcal{C}^1(\partial\Omega)$ , et (3) est toujours satisfaite.

L'idée de la preuve du théorème est de généraliser l'approche du cas régulier, ce qui nécessite d'adapter la condition d'invariance d'un ensemble (non nécessairement fermé) par le flot d'un

champ de vecteurs, dans ce cadre issu de la théorie de la mesure. On démontre donc en particulier :

$$\xi \cdot \nu_\Omega = 0, \quad \mathcal{H}^{d-1} - p.p. \Leftrightarrow \Omega \text{ est stable par le flot induit par } \xi,$$

où la stabilité est comprise modulo les ensembles de mesure de Lebesgue nulle.

Bien sûr, une difficulté dans l'application du théorème ci-dessus est de comprendre en quel sens a lieu la continuité de  $\mathcal{L}$ . On a en particulier trouvé des conditions suffisantes pour que  $\mathcal{L}$  soit continue pour la norme uniforme (la norme introduite sur  $X$  est toujours plus forte que la norme uniforme). La forme  $\mathcal{L}$  a l'avantage d'être définie sur un espace de fonctions réelles (alors que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est défini sur un espace de fonctions vectorielles), ce qui permet de poser la question suivante : la positivité de  $\mathcal{L}$  (en tant que forme linéaire sur  $X$ ) implique-t-elle sa continuité  $L^\infty$  ? Dans ce sens, on démontre la propriété suivante :

**Proposition 0.1 (Paragraphe 1.3)** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble à bord lipschitzien,  $\Gamma = \partial^*\Omega$ . Si une dérivée de forme  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est positive dans le sens de*

$$\left[ \xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega \geq 0, \quad \mathcal{H}^{d-1} - p.p. \text{ sur } \Gamma \right] \Rightarrow \left[ \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega) \geq 0 \right]. \quad (5)$$

alors il existe une constante  $M \geq 0$  telle que

$$\forall \xi \in \Theta, \quad |\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi| \leq M \|\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega\|_{L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1})}.$$

En particulier, la distribution  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est d'ordre 0, c'est-à-dire une mesure vectorielle (supportée par  $\partial\Omega$ ).

La condition de régularité imposée ici est essentiellement optimale : on construit une fonction de forme dont la dérivée est positive et non continue pour  $L^\infty$ , autour d'un domaine possédant un point de rebroussement (voir Paragraphe 1.3.3).

On démontre aussi le résultat naturel selon lequel une fonction  $J$  croissante pour l'inclusion, ou plus généralement satisfaisant

$$[\Omega \subset \Omega_\theta \text{ p.p.}] \Rightarrow [\mathcal{J}_\Omega(0) \leq \mathcal{J}_\Omega(\theta)],$$

a une dérivée positive dans le sens de (5). Ainsi on peut appliquer la proposition précédente à la fonction périmètre autour d'un ensemble convexe (ou pseudo-convexe et lipschitzien) et à l'énergie de Dirichlet pour des domaines lipschitziens. Les résultats obtenus par cette méthode abstraite, évidents pour des domaines réguliers, sont non triviaux dans le cas général (voir Paragraphe 1.3.4 et 1.3.5.2).

Tous ces résultats permettent d'exprimer la condition d'optimalité d'ordre 1 pour les problèmes d'optimisation classique : ainsi si  $\Omega^*$  est optimale pour le problème (1), alors

1. si  $\forall \theta \in \Theta$  petit,  $\Omega_\theta^* \in \mathcal{F}_{ad}$ ,

$$\mathcal{L}_{\Omega^*}^J \equiv 0,$$

2. si  $\mathcal{F}_{ad} = \{\Omega / V(\Omega) = V_0\}$  avec  $V_0 \in \mathbb{R}$  et  $V$  différentiable en  $\Omega^*$ , alors il existe  $\mu$  tel que

$$\mathcal{L}_{\Omega^*}^J \equiv \mu \mathcal{L}_{\Omega^*}^V.$$

La plupart de ces résultats ont fait l'objet d'une publication en collaboration [91]. Nous les étendons ici au cas de la dérivée seconde de forme :

**Théorème 0.2 (Paragraphe 1.4.1)** *Soit  $\Omega$  à périmètre fini,  $\Gamma = \partial^*\Omega$ , et  $\mathcal{J}_\Omega$  une fonction de forme satisfaisant (3) et deux fois différentiable en 0, avec  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \equiv 0$ .*

*Alors il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{L}_2 : X \times X \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour la topologie de  $X$  introduite par le théorème 0.1, et telle que*

$$\mathcal{J}''_\Omega(0) \cdot (\xi, \eta) = \mathcal{L}_2(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \eta|_\Gamma \cdot \nu_\Omega).$$

Ce résultat permet de traiter le cas des formes optimales dans les situations précédemment évoquées : en effet, ce sont alors des formes critiques (pour la fonction  $J$  ou pour le Lagrangien  $J - \mu V$  selon les situations) :

1. si  $\forall \theta \in \Theta$  petit,  $\Omega_\theta^* \in \mathcal{F}_{ad}$ ,

$$\mathcal{L}_{2,\Omega^*}^J \geq 0,$$

2. si  $\mathcal{F}_{ad} = \{\Omega / V(\Omega) = V_0\}$  avec  $V_0 \in \mathbb{R}$  et  $V$  deux fois différentiable en  $\Omega^*$ , alors il existe  $\mu$  telle que

$$\mathcal{L}_{2,\Omega^*}^{J-\mu V} \geq 0.$$

Pour le cas de formes non critiques, on sait que des termes demandant plus de régularité (du type  $D\nu_\Omega$ ) apparaissent dans la structure des dérivées secondes, pour des ensembles réguliers (voir par exemple [109]). Il est donc difficile de savoir comment les étendre dans le cas irrégulier. Néanmoins, on montre que notre approche (différente de celle de [109]) permet de retrouver cette structure dans le cas régulier.

## Chapitre 2

### Optimisation de forme sous contrainte de convexité

Ce paragraphe est une collaboration avec Arian Novruz<sup>1</sup>, et fait l'objet d'un article soumis pour publication ([90]).

On a choisi de s'intéresser dans ce chapitre à la *contrainte de convexité* en dimension 2. On considère donc des problèmes d'optimisation de forme du type

$$\min_{\substack{\Omega \in \mathcal{F}_{ad} \\ \Omega \text{ convexe}}} J(\Omega), \tag{6}$$

où  $\mathcal{F}_{ad} \subset \mathcal{P}(\mathbb{R}^2)$ .

En ce qui concerne la question de l'existence, le problème est en général facile à résoudre, car la contrainte de convexité fournit de la compacité (pour les topologies usuelles). Un autre avantage à cette contrainte est de fournir un peu de régularité a priori des formes optimales. En effet, toute forme admissible est à bord lipschitzien. On n'a donc pas besoin de faire appel aux classes d'ensembles irréguliers évoquées au début de notre introduction. Néanmoins, on rencontre une difficulté comparable à celle rencontrée pour les formes irrégulières : en effet, une fois l'existence d'une forme optimale  $\Omega^*$  obtenue, il est difficile d'écrire des conditions d'optimalité pour celle-ci, car précisément la compacité fournie par la contrainte de convexité a pour contrepartie de limiter les déformations de frontières qui conservent cette contrainte (un compact est d'intérieur vide, en dimension infinie). Plus précisément, il est délicat d'éliminer des formes qui saturent la contrainte de convexité. Alors que les formes très irrégulières rendaient difficiles l'écriture de l'optimalité au chapitre 1, il s'agit ici des formes nulle part strictement convexes qui sont difficiles à analyser. Pour imaginer ces formes singulières, précisons qu'il existe des ouverts convexes  $\Omega$  tels que

pour tout ouvert non vide  $\gamma$  de  $\partial\Omega$ , il existe  $(x, y) \in \gamma$  avec  $[x, y] \subset \partial\Omega$ .

Un polygone en est un exemple, mais on précise déjà que l'on peut même trouver des exemples  $\Omega$  de régularité  $\mathcal{C}^{1,1}$  (voir remarque 3.4), ce qui nous servira au chapitre 3.

Notre première tâche fut donc d'écrire des **conditions d'optimalité abstraites** pour les problèmes du type (6) ; en particulier, on écrit explicitement les conditions d'ordre 2 qui se révéleront très utiles dans nos applications.

---

<sup>1</sup>University of Ottawa, Department of Mathematics and Statistics, 585 King Edward, Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada

Il est connu que, en dimension 2, on peut paramétrer la contrainte de convexité de manière linéaire : pour voir cela, posons

$$\Omega_u := \left\{ (r, \theta) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} ; r < \frac{1}{u(\theta)} \right\}, \quad (7)$$

où  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ ,  $(r, \theta)$  désigne les coordonnées polaires centrées en un point  $O$ , et  $u : \mathbb{T} \rightarrow ]0, \infty[$ .

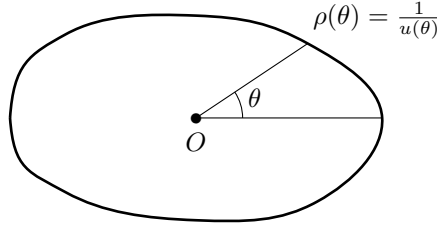


FIG. 2 – Paramétrisation d'un convexe contenant  $O$

Un rapide calcul de la courbure permet d'obtenir la caractérisation suivante :

$$\Omega_u \text{ est convexe} \iff u'' + u \geq 0,$$

où  $u'' + u$  est compris au sens des distributions (sur  $\mathbb{T}$  ou en tant que distribution  $2\pi$ -périodique sur  $\mathbb{R}$ ). Dans ce cas,  $u'' + u$  est une mesure sur  $\mathbb{T}$ , et on pose  $S_u = \text{supp}(u'' + u)$  le support de cette mesure. On peut voir le comportement géométrique de  $\Omega_u$  sur cette mesure : par exemple un coin de  $\Omega_u$  sera vu comme une masse de Dirac sur  $u'' + u$ , et une partie strictement convexe sera une partie où  $u'' + u > 0$  (cette notation étant ambiguë, on dit plutôt qu'on est dans le support de la mesure). En revanche, là où  $u'' + u = 0$ , on obtient des segments de droite.

Ainsi, si on pose  $j(u) = J(\Omega_u)$ , le problème (6) peut se reformuler ainsi :

$$\min_{\substack{u \in S_{ad} \\ u > 0, u'' + u \geq 0}} \{j(u) := J(\Omega_u)\} \quad (8)$$

où  $S_{ad}$  est un espace de fonctions sur  $\mathbb{T}$ , prenant en compte les éventuelles contraintes imposées dans  $\mathcal{F}_{ad}$  (précisément, on minimise ainsi  $J$  parmi les convexes dont l'intérieur contient  $O$ ).

Pour les applications qui suivent, on a analysé les cas suivants :

$$\min \{j(u), \quad u'' + u \geq 0, \quad a \leq u \leq b\}, \quad (9)$$

où  $0 < a < b$  sont donnés, et

$$\min \left\{ j(u), \quad u'' + u \geq 0, \quad m(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{u^2} = m_0 \right\}, \quad (10)$$

où  $m_0 > 0$ . Ces contraintes correspondent géométriquement aux classes d'ensembles  $\mathcal{F}_{ad} = \{\Omega / \partial\Omega \subset A(a, b)\}$  où  $A(a, b) = \{(r, \theta) / \frac{1}{b} \leq r \leq \frac{1}{a}\}$  est une couronne dans le premier cas, et  $\mathcal{F}_{ad} = \{\Omega / |\Omega| = m_0\}$  dans le second cas.

En utilisant des théorèmes abstraits sur les conditions d'optimalité avec contraintes de dimension infinie, on obtient :

**Théorème 0.3 (Paragraphe 2.3)** *Si  $u_0$  est solution de (10) où  $j : H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^2$ , alors il existe  $\zeta_0 \in H^1(\mathbb{T})$  et  $\mu \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\zeta_0 = 0 \text{ sur } S_{u_0}, \quad (11)$$

$$\text{et } \forall v \in H^1(\mathbb{T}), \quad j'(u_0)v = \int_{\mathbb{T}} (v\zeta_0 - \zeta_0'v') - \mu m'(u_0)(v). \quad (12)$$

De plus, pour tout  $v \in H^1(\mathbb{T})$  tel que  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  satisfaisant  $\begin{cases} v'' + v \geq \lambda(u_0'' + u_0) \\ \int_{\mathbb{T}} v d(\zeta_0 + \zeta_0'') - \mu m'(u_0)(v) = 0 \end{cases}$ ,

$$\text{on a } j''(u_0)(v, v) + \mu m''(u_0)(v, v) \geq 0. \quad (13)$$

Pour le cas de contraintes du type (9), on obtient un résultat similaire, faisant intervenir d'autres multiplicateurs de Lagrange  $\mu_a, \mu_b$  qui sont des mesures portées par  $\{u_0 = a\}$  et  $\{u_0 = b\}$  respectivement. Ces mesures permettent de contrôler la saturation de la contrainte  $a \leq u \leq b$  (voir Paragraphe 2.3).

En second lieu, nous avons tiré parti de ce théorème en retrouvant, et en généralisant deux résultats obtenus indépendamment dans la littérature, par T. Lachand-Robert et M. Peletier dans [88], et par M. Crouzeix dans [42] : il y est démontré que, pour des fonctions  $j(u) = J(\Omega_u)$  particulières, toute forme optimale pour le problème (9) avec contrainte d'inclusion dans la couronne  $A(a, b)$  est un polygone.

Plus précisément, avec la paramétrisation (7), les cas  $J(\Omega_u) = \int_{\mathbb{T}} h_1(u) - u'^2 h_2(u)$  sont étudiés dans [88], et les cas  $J(\Omega_u) = \int_{\mathbb{T}} h(\frac{u'}{u})$  dans [42], où  $h_1, h_2, h$  sont des fonctions réelles, avec  $h$  concave et paire, et satisfaisant des contraintes techniques utiles pour traiter la contrainte  $a \leq u \leq b$  (voir remarques 2.2.5 et 2.2.6). On a réuni et généralisé ces résultats aux fonctions du type

$$J(\Omega_u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u') d\theta \quad (14)$$

où  $G : (\theta, u, p) \in \mathbb{T} \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \mapsto G(\theta, u, p) \in \mathbb{R}$  est  $\mathcal{C}^2$  et satisfait  $G_{pp} < 0$ .

Précisément, nous démontrons :

**Théorème 0.4 (Paragraphe 2.2)** *Supposons que  $j$  s'écrit  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$ , avec  $G : \mathbb{T} \times ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{C}^2$  et strictement concave en la troisième variable, c'est-à-dire*

$$G_{pp} < 0. \quad (15)$$

- Si  $u_0$  est solution de (9), alors  $S_{u_0} \cap I$  est fini, pour toute composante connexe  $I$  de  $\{a < u_0 < b\}$ , et en particulier  $\Omega_{u_0}$  est localement polygonal dans la couronne  $A(a, b)$ .
- Si  $u_0 > 0$  est solution de (10), alors  $S_{u_0}$  est fini, et donc  $\Omega_{u_0}$  est un polygone.

L'hypothèse (15) est une propriété de concavité ; moralement, on minimise une fonction concave dans l'ensemble des domaines convexes. Pour une telle minimisation, on s'attend à ce que le minimum sature les contraintes. Ici, la fonctionnelle n'est pas exactement concave, donc l'analyse est évidemment plus complexe, mais on s'attend à un comportement similaire. Par cette remarque, on justifie brièvement la raison pour laquelle les solutions vont être polygonales. En effet, que serait un domaine qui sature la contrainte de convexité ? Il s'agirait d'un domaine "nulle part" strictement convexe, c'est-à-dire un domaine dont le bord est presque partout composé de segments. Cela ne suffit pas encore à être polygonal, mais on a ainsi une intuition du résultat.

Pour la preuve de ce théorème, on exploite de façon intensive les conditions d'optimalité d'ordre 2. On peut en effet voir assez facilement que la condition d'ordre 1 ne suffit pas à avoir le caractère polygonal (sur des exemples simples, tous les cercles sont points critiques). Il est assez simple d'éliminer l'existence de parties strictement convexes dans le bord, c'est-à-dire montrer que le support de  $u_0'' + u_0$  est d'intérieur vide. Mais cela ne suffit pas à conclure. En effet, on peut comprendre la difficulté en regardant la décomposition de Lebesgue de la mesure  $u_0'' + u_0 = f(\theta)d\theta + \sum_n \alpha_n \delta_{\theta_n} + \mu_{sing}$  : la propriété précédente ne suffit pas à montrer  $\mu_{sing} = 0$ , ni même  $f = 0$ . Pour éliminer ces situations, la difficulté est de trouver des déformations admissibles pour les conditions d'optimalité (ce qui était facile sur un intervalle du support de  $u_0'' + u_0$ ). On utilise donc une idée, due à [88], qui consiste à choisir une déformation  $v$  telle que  $v'' + v$  soit localement proportionnelle à  $u_0'' + u_0$ , et qui permet de perturber  $u_0$  dans les directions  $+v$  et  $-v$ , tout en conservant la convexité.

A propos de la concavité en  $u'$ , la raison pour laquelle il n'y a pas besoin de condition en l'autre variable  $u$ , est que sur un petit intervalle,  $u$  est négligeable devant  $u'$ . Ceci explique qu'on peut traiter sans difficulté le cas d'une contrainte de mesure, puisqu'on travaille alors avec un Lagrangien  $L(\Omega_u) = J(\Omega_u) + \mu|\Omega_u|$  qui est aussi de la forme (14) et conserve la concavité en  $u'$  ; en fait, toute contrainte dépendant régulièrement de  $u$  fournit le même résultat.

Dans le cas de la contrainte d'inclusion dans la couronne, on sait qu'on ne peut pas conclure que les solutions sont polygonales, car il faut montrer qu'on ne sature pas la contrainte  $a \leq u \leq b$ , ce

qui nécessite des hypothèses supplémentaires sur  $G$  (voir les contre-exemples du paragraphe 2.5). On démontre par exemple :

**Théorème 0.5 (Paragraphe 2.2)** *Supposons que  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(u, u')$  avec  $G : ]0, \infty[ \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant*

(i)  $G$  est  $\mathcal{C}^2$ ,  $p \mapsto G(u, p)$  est paire et  $G_{pp} < 0$ ,

(ii)  $G_u(a, 0) < 0$

(iii)  $G_u(b, 0) > 0$ .

Si  $u_0$  est solution de (9), alors  $\Omega_{u_0}$  est un polygone.

(voir remarque 2.4.5 pour une généralisation à une fonctionnelle  $G$  qui dépend de  $\theta$ ).

Afin de recouvrir les cas de [88] et [42], nous obtenons aussi certaines généralisations de ce résultat, en affaiblissant (i) et (ii), voir théorèmes 2.2.2 et 2.2.3.

## Chapitre 3

### Optimisation de forme pour les valeurs propres

Dans ce paragraphe, on s'est intéressé à quelques problèmes classiques d'optimisation de forme pour les valeurs propres de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet homogènes. Précisément, on a regardé les deux problèmes suivants :

$$\min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \subset D}} \lambda_1(\Omega) \quad (16) \qquad \min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \text{ convexe}}} \lambda_2(\Omega), \quad (17)$$

où  $0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega)$  désignent les deux premières valeurs propres de l'opérateur de Laplace avec conditions de Dirichlet homogènes, défini sur un ouvert (ou un quasi-ouvert)  $\Omega$  de mesure finie,  $V_0 > 0$  et  $D$  est un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ .

En effet, ces deux problèmes feront ressortir les difficultés évoquées dans les précédents chapitres. Le premier a donné lieu à une publication en collaboration avec T. Briançon<sup>2</sup> [17]. Le second fait l'objet d'un article qui doit être soumis prochainement [89], et constitue une des contributions importantes de ce travail.

#### Minimisation de $\lambda_1$ sous contrainte de volume et d'inclusion

En ce qui concerne le premier problème, le théorème de Faber-Krahn établit que toute boule de volume  $V_0$  est solution de (16), et que toute solution, à un ensemble de capacité nulle près (qui n'est pas vu par la fonction  $\lambda_1$ ), est une boule. Bien sûr, cela ne vaut que si une telle boule existe dans  $D$ . Dans ce cas, par l'unicité rappelée ci-dessus, toute solution est régulière.

Dans le cas où la boîte  $D$  ne contient pas de boule de volume  $V_0$ , le problème redevient difficile. La question de l'existence est résolue, au moins dans la classe des quasi-ouverts, par exemple avec le théorème de Buttazzo et Dal Maso ([29]), quand la boîte  $D$  est bornée (ce que nous supposons ici). Mais comme on l'a déjà indiqué, il est délicat d'écrire une condition d'optimalité pour un domaine a priori si peu régulier. Pour un tel problème, on s'attend à ce que l'optimalité fournisse de la régularité, au moins celle des frontières libres (i.e.  $\partial\Omega \cap D$ ).

Historiquement, de tels résultats de régularité en optimisation de forme ont d'abord été obtenus pour les problèmes isopérimétriques, et il est connu que les frontières libres sont alors régulières si on travaille dans  $\mathbb{R}^d$  avec  $d \leq 7$ , et qu'à partir de la dimension 8, le bord libre se décompose en une partie régulière (le bord réduit) et une partie singulière  $\Sigma_{sing}$  qui satisfait  $\mathcal{H}^s(\Sigma_{sing}) = 0$ ,  $\forall s > d-8$ . Le cône de Simons ([123], [16]) fournit un sous-ensemble minimisant le périmètre, et possède une singularité ponctuelle.

---

<sup>2</sup>Lycée Agora, 92800 Puteaux, France, briancon\_tanguy@yahoo.fr

Bien plus tard, des résultats de régularité ont été obtenus par H. Alt et L. Caffarelli dans [5], pour le problème

$$\min_{\substack{v \in H^1(D) \\ v=u_0 \text{ sur } \partial D}} \int_D |\nabla v| + Q^2 \chi_{\{v>0\}} \quad (18)$$

où  $D$  est un ouvert connexe,  $Q$  est une fonction positive, et  $u_0 \in H^1(\Omega)$  est positive. Ils obtiennent des résultats de régularité de la frontière libre  $\partial\{u > 0\}$ , où  $u$  est solution de (18). Ces résultats ont été utilisés pour obtenir de la régularité pour la minimisation de l'énergie de Dirichlet (pour un second membre positif) sous contrainte de volume, dans la thèse de T. Briançon ([18, 19]). Il démontre que le bord libre se décompose en une partie régulière (le bord réduit) et une partie singulière  $\Sigma_{sing}$  qui satisfait  $\mathcal{H}^s(\Sigma_{sing}) = 0$ ,  $\forall s \geq d-1$  (résultats qui valent pour le bord de  $\{u > 0\}$  si  $u$  est solution de (18)). Il obtient aussi que l'ensemble singulier est vide en dimension 2.

Avec Tanguy Briançon, nous avons adapté ce travail pour le problème (16). On démontre le résultat (voir [17]) :

**Théorème 0.6 (Paragraphes 3.2.1 et 3.2.3)** *Soit  $D$  un ouvert borné connexe. Alors toute solution de (16) satisfait :*

1.  $\Omega^*$  est à périmètre fini dans  $D$  et

$$\mathcal{H}^{d-1}((\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*) \cap D) = 0, \quad (19)$$

où  $\partial^*\Omega^*$  est le bord réduit de  $\Omega^*$ .

2.  $\partial^*\Omega^*$  est une hypersurface analytique dans  $D$ .
3. Si  $d = 2$ , alors le bord topologique  $\partial\Omega^* \cap D$  est analytique.

En ce qui concerne la preuve de ce résultat, il s'agit de démontrer la condition d'optimalité

$$\Delta u_{\Omega^*} + \lambda_1(\Omega^*)u_{\Omega^*} = \sqrt{\Lambda}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega^*,$$

qui a un sens sans régularité sur  $\Omega^*$ . La régularité annoncée suivra par les résultats de [5], valables pour les solutions d'une telle équation ("weak solutions"). Pour obtenir cette condition d'optimalité, on a besoin d'effectuer des perturbations qui ne conservent pas la contrainte de volume. Pour cette raison, la difficulté majeure du travail consiste à montrer l'équivalence entre (16) et une version pénalisée pour la contrainte de volume (voir Théorème 3.2.2, et Paragraphe 3.2.2).

L'estimation de l'ensemble singulier  $(\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*)$  est donc moins fine que dans le cas du problème isopérimétrique, et celle-ci peut sans doute être améliorée, mais pas autant que dans le cas des minimiseurs du périmètre. En effet, même sur le problème modèle (18) étudié par H. Alt et L. Caffarelli, la question est encore ouverte : on sait qu'il existe une dimension critique  $d^*$  telle que si  $d < d^*$ , alors les frontières libres sont régulières, et si  $d \geq d^*$ , le bord se décompose en une partie régulière et une partie singulière  $\Sigma_{sing}$  qui satisfait  $\mathcal{H}^s(\Sigma_{sing}) = 0$ ,  $\forall s > d - d^*$ ; ces résultats ont été obtenus par G. Weiss dans [134]. La situation est donc la même que pour le problème isopérimétrique (pour lequel la dimension critique est 8). Il est montré dans [31] que  $d^* \geq 4$ , et dans [49] que  $d^* \leq 7$ , donc on sait que  $d^* \in \{4, 5, 6, 7\}$ , et il semble qu'on s'attende à ce que  $d^* = 7$ , mais ce résultat reste une conjecture. Il faut adapter ces résultats pour améliorer l'estimation (19).

Notons enfin que le théorème 0.6, combiné avec le résultat de symétrie de Serrin pour les problèmes surdéterminés ([118]) permet d'affirmer que, au moins en dimension 2, toute forme optimale  $\Omega^*$  ne touchant pas le bord de  $D$  est nécessairement une boule, et donc si  $D$  ne contient aucune boule de volume  $V_0$ , toute solution touche nécessairement le bord de la boîte.

### Minimisation de $\lambda_2$ sous contrainte de volume et de convexité

Rappelons la motivation mathématique du problème (17) : le même problème sans contrainte de convexité est résolu, puisqu'une conséquence facile du théorème de Faber-Krahn est que toutes les solutions sont alors une union disjointe de deux boules ayant chacune un volume de  $V_0/2$ . Il est assez simple de voir que le rajout d'une contrainte de connexité est inadaptée, car il n'y a alors



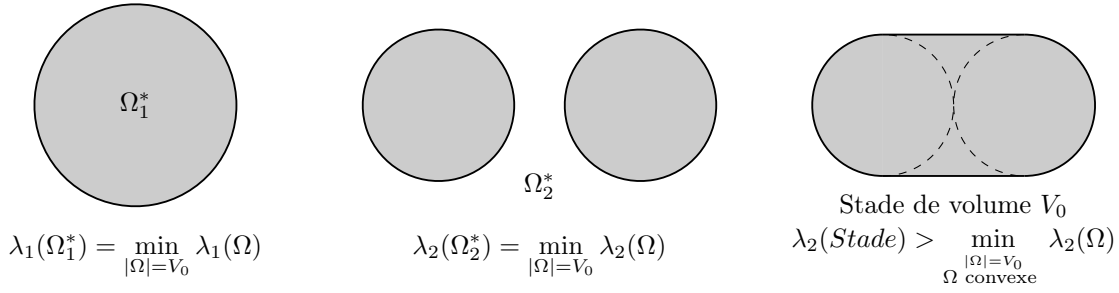


FIG. 3 – Minimisation des deux premières valeurs propres sous contrainte de volume

pas de solution au problème. Par contre, le problème redevient intéressant mathématiquement avec cette contrainte de convexité.

Ce problème entre bien dans le cadre de notre problématique sur les conditions d'optimalité : en effet, l'étude effectuée par A. Henrot et E. Oudet dans [72] montre bien la difficulté d'un tel problème. L'existence d'une forme optimale  $\Omega^*$  est facilement obtenue, et ils tentent ensuite d'obtenir des informations sur celle-ci à l'aide des conditions d'optimalité. Ils démontrent entre autres que le "stade" (enveloppe convexe de deux boules identiques tangentes, cf. Figure 3) n'est pas une forme optimale.

Ils montrent les conditions d'optimalité suivantes :

**Théorème 0.7 (A. Henrot, E. Oudet [72])** *Toute solution  $\Omega^*$  de (17) est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

*Si de plus  $\Omega^*$  est une solution telle que :*

$$- \Omega^* \text{ est } \mathcal{C}^{1,1}, \quad (20)$$

$$- \text{le bord de } \Omega^* \text{ ne contient qu'un nombre fini de segments}, \quad (21)$$

alors, en notant  $u_2$  une seconde fonction propre sur  $\Omega^*$ ,

- $\lambda_2(\Omega^*)$  est simple,
- $\exists \Lambda > 0$  tel que pour toute partie strictement convexe  $\gamma$  de  $\partial\Omega^*$ ,

$$|\nabla u_2|_{|\gamma} = \Lambda, \quad (22)$$

- si  $\Sigma$  est un segment de  $\partial\Omega^*$ ,  $t \in [a, b]$  une paramétrisation de  $\Sigma$ , il existe  $w \in \mathcal{C}^2([a, b])$  positive telle que

$$\begin{cases} |\nabla u_2|_{|\Sigma}(t) = \Lambda + w''(t), \quad \forall t \in [a, b] \\ w(a) = w'(a) = w''(a) = w(b) = w'(b) = w''(b) = 0. \end{cases} \quad (23)$$

Ils utilisent ensuite ce théorème pour obtenir des informations géométriques sur les formes optimales.

Le résultat de régularité  $\mathcal{C}^1$  est un fait très général, basé sur le comportement des fonctions propres dans un coin (voir [24]). Quant aux conditions d'optimalité, on voit bien que les auteurs ont eu besoin, d'une part de régularité sur  $\Omega^*$  (hypothèse (20)), et d'autre part de supposer que la contrainte de convexité n'est pas saturée partout (voir (21)). Ces deux hypothèses montrent bien qu'il est difficile, sur le problème (17), d'écrire directement les conditions d'optimalité, puisque la non-régularité et l'accumulation de segments au bord sont des obstacles, d'une part à écrire la dérivée de forme, d'autre part à gérer la contrainte de convexité. Nous avons donc utilisé l'approche introduite au chapitre 2 pour généraliser le théorème précédent. Nous avons essayé de démontrer les hypothèses faites a priori dans le théorème 0.7, mais les calculs nous ont amenés au contraire à obtenir le résultat suivant :

**Proposition 0.2** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32) satisfaisant (21). Alors*

$$\Omega^* \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^{1,1}.$$

Nous avons donc approfondi notre analyse, et nous avons obtenu la régularité précise de  $\Omega^*$  avec le théorème suivant, qui généralise la proposition précédente :

**Théorème 0.8 (Paragraphe 3.3.2)** *Soit  $\Omega^*$  solution de (17), satisfaisant l'hypothèse (21). Alors*

$$\Omega^* \text{ est de classe } \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}, \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \Omega^* \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

Ce résultat affine d'une part le résultat de régularité ( $\mathcal{C}^1$ ), et d'autre part celui de non-régularité, obtenus dans [72] ; ce dernier résultat dit qu'on ne peut pas avoir  $u_2 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^*})$  (et donc en particulier  $\Omega^*$  n'est pas  $\mathcal{C}^{2, \varepsilon}$ ).

Pour la preuve du théorème ci-dessus, on écrit la condition d'optimalité d'ordre 1 sur les parties strictement convexes  $\gamma \subset \Omega^*$  (qui ne nécessite pas de régularité) :

$$\begin{cases} -\Delta u_2 &= \lambda_2(\Omega^*) u_2 & \text{dans } \Omega^* \\ u_2 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega^*. \\ |\nabla u_2| &= \Lambda & \text{sur } \gamma \end{cases} \quad (24)$$

où  $\partial\Omega^* \setminus \gamma$  désigne un ensemble fini de segments.

L'idée principale est ensuite de transporter cette équation dans un domaine de référence, par exemple en utilisant l'application conforme entre  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} / \Im(z) < 0\}$  et  $\Omega^*$  (qui existe par le théorème de représentation conforme de Riemann). On obtient le nouveau problème

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{u}_2 &= \lambda_2(\Omega^*) |\phi'|^2 \widehat{u}_2 & \text{dans } \mathbb{H} \\ \widehat{u}_2 &= 0 & \text{sur } \partial\mathbb{H} \\ |\nabla \widehat{u}_2| &= |\phi'| |\nabla u_2| = \Lambda |\phi'| & \text{sur } J_-, \end{cases} \quad (25)$$

où  $\widehat{\cdot}$  désigne la composition par  $\phi$ , et  $J_- := \phi^{-1}(\gamma)$ .

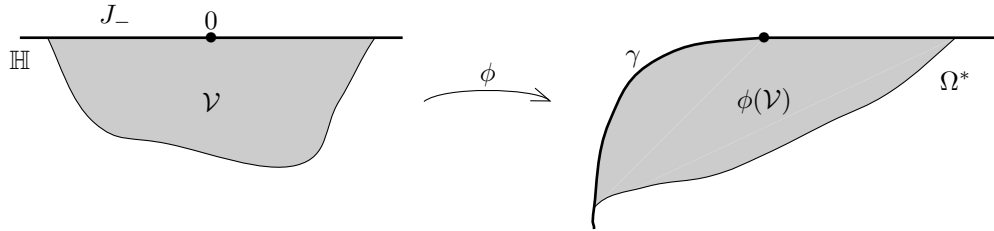


FIG. 4 – Application conforme

Les liens de régularité entre un domaine et son application conforme nous amènent aux propriétés suivantes :

- $\text{Arg}(\phi')$  est  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\partial\mathbb{H} \setminus J_-$  (car les segments sont réguliers)
- $\ln(|\phi'|)$  est un peu régulier sur  $\overline{J_-}$  (d'après la condition d'optimalité sur  $\gamma$ ).

On a donc des propriétés de régularité pour les parties réelles et imaginaires d'une même fonction holomorphe ( $\text{Log}(\phi')$ ), sur des parties complémentaires du bord. On a analysé le comportement asymptotique de ces fonctions au bord de  $J_-$ , c'est-à-dire, pour  $\partial\Omega^*$ , à l'intersection d'une partie strictement convexe et d'un segment. Le point important est que,  $\ln(|\phi'|)$  satisfaisant une équation avec condition mixte Dirichlet-Neumann de chaque côté de 0, sa régularité ne peut être que du type  $\mathcal{C}^{k, \alpha}$  avec  $k$  entier naturel, et  $\alpha = \frac{1}{2}$ . On en déduit que  $\Omega^*$  est soit  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$  (et pas mieux), soit  $\mathcal{C}^{2, \frac{1}{2}}$ . Mais le résultat de [72] affirmant que  $\Omega^*$  ne peut pas être mieux que  $\mathcal{C}^2$  permet de conclure.

Quant à l'hypothèse (21), nous ne sommes pas encore en mesure de nous en passer. En effet, de nombreux obstacles se présentent alors, car il est difficile d'écrire et d'utiliser une condition d'optimalité pour des ensembles saturant la contrainte de convexité presque partout. Mais nous montrons comment il est possible de contourner certaines difficultés.

Ainsi, le premier obstacle consiste à savoir que  $\lambda_2(\Omega^*)$  est simple, car sans cela, la fonction  $\lambda_2$  n'est pas différentiable autour de  $\Omega^*$  (et la preuve donnée dans [72] nécessite l'existence d'une partie

strictement convexe dans le bord de  $\Omega^*$ , ce qui n'est pas vrai en général, même pour un ensemble  $\mathcal{C}^{1,1}$ , voir remarque 3.4). Nous avons contourné cette difficulté en montrant que la minimisation de  $\lambda_2$  peut se ramener à un problème de minimisation sur la première valeur propre, pour chaque ensemble nodal : si  $\Omega^*$  est solution de (17), et  $u_2$  une seconde fonction propre sur  $\Omega^*$ , en posant  $\Omega_- = \{x \in \Omega / u_2(x) < 0\}$ ,  $\Omega_+ = \{x \in \Omega / u_2(x) > 0\}$ , et  $\mathcal{N} = \{x \in \Omega / u_2(x) = 0\}$ , on observe que  $\Omega_+$  est solution d'un problème posé uniquement sur  $\lambda_1$  : en effet, si on fige le domaine  $\Omega_-$ , alors  $\Omega_+$  minimise la première valeur propre, parmi les domaines  $\omega$  tels que  $\Omega = \omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-$  satisfait les contraintes de (17) (voir proposition 3.6).

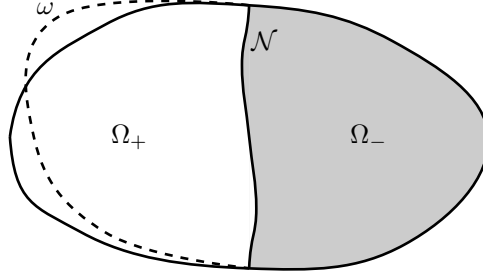


FIG. 5 – Ensembles nodaux de  $u_2$

On peut donc appliquer les conditions d'optimalité générales obtenues au théorème 0.3 (voir théorème 3.6).

**Une extension :** nous avons adapté notre approche pour l'analyse de la régularité de la forme optimale de

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \subset D}} \lambda_1(\Omega), \quad (26)$$

où  $D = \mathbb{R} \times ]-a, a[$  est une bande infinie. La régularité des bords libres a déjà été résolue, et il s'agit d'analyser la régularité des solutions, lorsque celles-ci touchent le bord de la boîte.

On y prouve la même régularité, à savoir  $\Omega^* \in \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ , cette fois-ci en supposant a priori que le contact avec l'obstacle est tangentiel et hölderien (pour un  $\alpha > 0$ ). Pour cela, nous avons démontré que le nombre de parties du bord ne satisfaisant pas d'équation surdéterminée  $|\nabla u_1| = \Lambda$  (c'est-à-dire le nombre de composantes connexes de  $\partial\Omega \cap \partial D$ ), sont en nombre fini (précisément deux), en utilisant les symétries du problème (voir Paragraphe 3.4). Nous montrons aussi que la forme optimale ne peut pas être plus régulière que  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ , en montrant que le contact avec la boîte ne peut pas être  $\mathcal{C}^2$  et en raisonnant comme précédemment pour le problème (17). Quant à l'hypothèse de contact tangentiel, il s'agit d'un résultat de régularité jusqu'au bord de la boîte, très probable, mais qui nécessite encore un travail complémentaire.

**Approche numérique :** nous avons entrepris de retrouver numériquement la régularité des formes optimales et, en particulier, la propriété de Hölder  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ . On a donc appliqué une méthode de déformation de frontière pour résoudre le problème

$$\min_{\Omega \subset D} \lambda_1(\Omega) + \mu|\Omega|, \quad (27)$$

où  $\mu > 0$  est assez grand pour que les formes optimales touchent le bord de  $D = \mathbb{R} \times ]-a, a[$  (on a ainsi un problème sans contrainte de volume, et une analyse rapide permet de généraliser les résultats de régularité pour ce nouveau problème). Avec une représentation d'ordre 2 des formes numériques, on a pu retrouver le résultat obtenu théoriquement, voir le paragraphe 3.5.

## Chapitre 4

### Problèmes elliptiques surdéterminés

La motivation de ce chapitre n'est pas directement l'optimisation de forme. Les résultats obtenus ici sont nés d'une collaboration avec Ilaria Fragalà<sup>3</sup> et Filippo Gazzola<sup>3</sup>. Ils ont, de différentes manières, généralisé le célèbre résultat de Serrin, établissant que s'il existe une fonction  $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ , sur un ouvert borné  $\Omega$ , et satisfaisant, pour un certain  $c > 0$  :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\nu &= -c & \text{sur } \partial\Omega, \end{cases} \quad (28)$$

alors nécessairement  $\Omega$  est une boule de  $\mathbb{R}^d$  ( $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée et suffisamment régulière). Ce type de problème est dit surdéterminé car, sans la troisième équation, le problème est bien posé pour des fonctions  $f$  raisonnables, c'est-à-dire qu'une telle fonction  $u$  existe et est unique, pour tout ouvert borné  $\Omega$  (sous réserve de régularité si on veut que  $u$  soit  $\mathcal{C}^1$  jusqu'au bord). Cette troisième équation fournit donc une information supplémentaire sur  $\Omega$ , qu'il s'agit de déterminer.

Dans [56], ce résultat est généralisé pour des problèmes "partiellement" surdéterminés, c'est-à-dire quand l'équation  $u_\nu = -c$  n'est plus satisfaite que sur une partie  $\Gamma$  du bord de  $\Omega$ . Ils obtiennent entre autres le résultat suivant :

**Théorème 0.9 (Fragalà-Gazzola, [56])** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné avec  $\partial\Omega$  connexe,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  non vide et (relativement) ouvert, et  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  analytique. Supposons qu'il existe un ouvert  $\tilde{\Omega}$  à bord connexe, analytique, et contenant  $\Gamma$ .*

*S'il existe une solution  $u$  de*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\nu &= -c & \text{sur } \Gamma \end{cases}, \quad (29)$$

*alors  $\Omega$  est une boule.*

Les deux auteurs ont alors naturellement cherché à construire des domaines satisfaisant un problème partiellement surdéterminé, mais qui ne soient pas des boules. Ils se sont alors tournés vers l'optimisation de forme puisque la condition d'optimalité fournit une équation surdéterminée. Mais du fait des difficultés évoquées dans cette thèse, les contre-exemples fournis par l'optimisation de forme peuvent être incomplets, car la régularité n'est pas résolue. Par exemple, la forme optimale pour  $\lambda_2$  sous contrainte de convexité ne fournit pas, dans l'état actuel des connaissances, un exemple complet pour obtenir une équation du type (29) (mais il s'en faut de peu).

Nous avons mis au point quelques exemples complets, qui ont été publiés dans [57].

Le premier exemple (voir Théorème 4.1.1) est un domaine  $\Omega^*$  solution de

$$\min_{|\Omega|=\alpha, \Omega \subset D} J(\Omega), \quad (30)$$

où  $D = (-1, 1)^d$  et

$$J(\Omega) := \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right) dx \right\}, \quad (31)$$

du même type que (16).

Nous avons démontré que, en choisissant  $\alpha \in |B_{\mathbb{R}^d}(0, 1)|, 2^d[$ , l'ensemble ci-dessus fournit un domaine  $\Omega^*$  tel que  $u_{\Omega^*}$  satisfait à une équation surdéterminée du type (29). Pour cela, on applique les résultats de régularité de [19], permettant de montrer que  $\Omega^*$  satisfait (29), avec  $\Gamma = \partial^* \Omega^*$  régulier (voir paragraphe 4.1.1).

<sup>3</sup>Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano - Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy

On a aussi montré que  $\partial\Omega^*$  est connexe; en effet, sans cette propriété, il existe des contre-exemples triviaux de problèmes partiellement surdéterminés (par exemple en considérant des couronnes).

Le théorème 0.9 ayant aussi des généralisations pour des problèmes de type Neumann avec condition surdéterminée de Dirichlet, on a aussi construit des domaines satisfaisant

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{dans } \Omega \\ |\nabla u| &= c & \text{sur } \partial\Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \Gamma. \end{cases} \quad (32)$$

Dans ce cas, les contre-exemples découlent de calculs explicites, dont l'idée est d'étudier les surfaces de niveau 0 de fonctions radiales, construites de sorte à satisfaire à la fois l'équation elliptique  $-\Delta u = f(u)$  sur  $\mathbb{R}^d$  et l'équation eikonale  $|\nabla u| = c$  sur le complémentaire d'une boule (voir paragraphe 4.1.3). Une telle construction peut être adaptée au cas d'un problème elliptique du type (32), mais posé sur un domaine extérieur.

## Cas concrets et Applications

La plupart des contributions de ce travail sont de nature théorique. Les modèles étudiés recouvrent cependant un grand nombre d'applications. Nous terminons cette introduction par quelques commentaires où nous indiquons comment un certain nombre de problèmes appliqués ou concrets d'optimisation de forme, se trouvent en partie éclairés par notre travail.

- **Électromouillage** : Claire Scheid a étudié dans sa thèse le problème suivant : chercher la forme d'une goutte de liquide, posée sur un matériau solide, et soumise à un champ électrique (on appelle cette expérience *électromouillage*). La goutte minimise alors une fonction d'énergie composée de trois termes : la pesanteur (énergie potentielle), la capillarité, et l'énergie électrostatique due au champ électrique imposé. La contrainte est une contrainte de volume d'une part, et d'inclusion dans un demi-espace d'autre part, si par exemple le matériau sur lequel la goutte est posée, est supposé plat et horizontal. Le résultat principal de C. Scheid ([116], [117]) concerne l'angle de contact entre le bord de la goutte et le matériau.

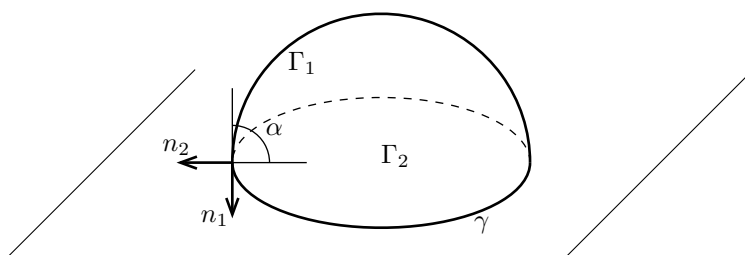


FIG. 6 – Forme d'une goutte en électromouillage

Il est démontré en particulier que cet angle ne dépend pas (dans ce modèle) de l'intensité du champ électrique. Ce résultat peut s'interpréter en terme de structure des dérivées de forme.

Nous retrouvons le résultat de C. Scheid par application directe de notre approche (voir le paragraphe 1.5.2). En effet, il suffit de comprendre comment les dérivées de forme de chaque terme d'énergie se comportent à l'interface  $\gamma$  entre la goutte et le matériau (ce qui est fait implicitement dans [116]). Pour l'énergie potentielle (intégrale sur un domaine, donc du type volume), la dérivée n'a pas de terme sur  $\gamma$ ; pour la capillarité (du type périmètre), il y a un terme porté par  $\mathcal{H}_{|\gamma}^{d-2}$  qu'on peut calculer en fonction de l'angle de contact; et enfin la difficulté est de montrer que la dérivée de l'énergie électrostatique n'est pas portée par  $\gamma$  (on utilise pour cela des résultats de

régularité dans les domaines à coins). Donc sur  $\gamma$ , seul le terme de capillarité intervient, ce qui explique l'indépendance vis-à-vis du champ électrique.

Pour simplifier la présentation, nous avons traité un cas un peu plus simple de fonctionnelle d'énergie que celui étudié dans [116], mais notre approche peut facilement se généraliser. De plus, notre résultat est valable en toute dimension, alors qu'il est fait en dimension 2 et 3 dans [116] (puisque ce sont les seuls ayant un sens physique dans le modèle étudié).

• **Problème de Newton** : La question est de trouver la forme d'un objet pour que, lors d'un déplacement à vitesse constante, sa résistance à la pression exercée par un fluide soit la plus faible possible (problème introduit par I. Newton dans *Principia Mathematica*, voir les travaux de Thomas Lachand-Robert, résumés dans [85]). Une modélisation possible de ce problème se ramène à un problème d'optimisation de forme sous contrainte de convexité (voir aussi le paragraphe *perspectives* à la fin de cette thèse). Il a été démontré dans [87] par T. Lachand-Robert et M. Peletier que les minimiseurs ne sont strictement convexes sur aucune partie relativement ouverte (non vide) du bord. Ce résultat a motivé l'étude de l'optimisation de la même fonctionnelle, mais dans une sous-classe des domaines convexes *nulle part strictement convexes*, à savoir les convexes développables, par les mêmes auteurs (voir [88]). Le reformulation du problème est alors de la forme (9) étudiée au Chapitre 2. On explique à la remarque 2.2.6 comment le théorème 0.5 généralise un des résultats de [88].

• **Image numérique** : Ce paragraphe est basé sur les notes d'un exposé de Michel Crouzeix. Étant donné une matrice  $A$ , carrée complexe de taille  $d$ , on définit son image numérique par

$$W(A) = \{ \langle Av, v \rangle / v \in \mathbb{C}^d, \|v\| = 1 \}.$$

Cet ensemble est un ensemble convexe, contenant le spectre de  $A$ . Il peut s'avérer intéressant d'étudier des problèmes d'optimisation de forme liés à cette notion. Le problème aura alors naturellement une contrainte de convexité. Par exemple, posons

$$C(\Omega) := \sup_{d,p,A} \{ \|p(A)\| / W(A) \subset \overline{\Omega}, |p(z)| \leq 1 \text{ dans } \Omega \}$$

où  $d$  parcourt  $\mathbb{N}$ ,  $p$  est un polynôme, et  $A$  une matrice carrée de taille  $d$ .

Autrement dit,  $C(\Omega)$  est la meilleure constante pour que l'inégalité

$$\|p(A)\| \leq C(\Omega) \sup_{z \in \Omega} |p(z)|$$

ait lieu pour tout polynôme  $p$  et toute matrice carrée  $A$  telle que  $W(A) \subset \overline{\Omega}$  (de taille quelconque).

En ce qui concerne le problème d'optimisation de forme suivant :

$$\mathcal{Q} = \max_{\Omega \text{ convexe de } \mathbb{C}} C(\Omega),$$

on sait que  $\mathcal{Q} \geq 2$ , et il est conjecturé que  $\mathcal{Q} = 2$ . Il est démontré dans [43] que  $\mathcal{Q} \leq 11,08$ . L'intérêt de cette constante  $\mathcal{Q}$  est d'être universelle, c'est-à-dire qu'elle ne dépend pas du degré du polynôme  $p$  ou de la taille de la matrice  $A$  (ce qui permet d'étendre les estimations à la dimension infinie (voir [43])).

Une étape dans la démonstration se ramène à un problème d'optimisation de forme purement géométrique, qui rentre aussi dans la formulation étudiée au Chapitre 2 (voir remarque 2.2.5). On cite [44] pour des applications de ces notions.

On voit bien par les exemples ci-dessus, que les applications de l'optimisation de forme sont nombreuses, aussi bien dans les différents domaines des mathématiques, que dans les modèles issus de la physique ou de la biologie. Les questions étudiées dans cette thèse ont pour but de mieux comprendre les méthodes utilisées pour résoudre ces problèmes appliqués.



# Notations

## Notations générales

$d$	: entier naturel non nul, dimension de l'espace de travail
$\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$	: ensemble des parties de $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{F}_{ad}$	: sous-ensemble de $\mathcal{P}(\mathbb{R}^d)$ , ensemble de formes admissibles
$J$	: fonctionnelle de forme, définie sur $\mathcal{F}_{ad}$
$\Omega$	: domaine de $\mathbb{R}^d$
$\Omega^*$	: solution d'un problème d'optimisation de forme
$u_\Omega$	: fonction d'état, solution d'une EDP elliptique sur $\Omega$ , avec condition de Dirichlet
$ \Omega $	: volume de $\Omega$
$\mathcal{C}^k$	: espace des fonctions $k$ fois continûment différentiables
$\mathcal{C}^{k,\alpha}$	: espace des fonctions $\mathcal{C}^k$ à dérivée $k$ -ième $\alpha$ -höldérienne
$W^{m,p}$	: espace de Sobolev des fonctions dont la $m$ -ième dérivée est dans $L^p$
$H^s$	: $W^{s,2}$

## Chapitre 1

$P(\Omega)$	: périmètre de $\Omega$
$\nabla \cdot$	: divergence
$\chi_\Omega$	: fonction indicatrice de $\Omega$
$\mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$	: espace des fonctions $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^d$ , à support compact, à valeurs dans $\mathbb{R}^d$
$\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$	: espace des distributions, dual topologique de $\mathcal{D}$
$\nabla$	: gradient
$L^\infty(Y, \mu)$	: espace des classes de fonctions bornées sur $Y$ , mesurables pour $\mu$
$\Theta$	: espace de Banach des fonctions $\mathcal{C}^1$ de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{R}^d$ , bornées et à dérivées bornées
$\Theta'$	: dual topologique de $\Theta$
$\theta$	: élément de $\Theta$ , champ de déformation sur $\mathbb{R}^d$
$\Omega_\theta$	: $(Id + \theta)(\Omega)$ , perturbation de la forme $\Omega$
$\mathcal{J}_\Omega$	: $J(\Omega_\theta)$
$\mathcal{J}'_\Omega(0)$	: dérivée de forme de $J$ autour de $\Omega$ , appartient à $\Theta'$
$\mathcal{P}'_\Omega(0)$	: dérivée de forme du périmètre autour de $\Omega$
$\mathcal{L}$	: structure de $\mathcal{J}'_\Omega(0)$ , dépend de $J$ et $\Omega$
$\nu_\Omega$	: vecteur normal extérieur à $\Omega$ (défini sur $\partial^*\Omega$ )
$\xi$	: élément de $\Theta$ , direction de déformation pour la dérivée



$\partial\Omega$	: bord topologique
$\partial^*\Omega$	: bord réduit de $\Omega$ , sous-ensemble du bord topologique
$\Gamma$	: bord réduit ou bord topologique de $\Omega$ , selon les cas
$\mathcal{H}^s$	: mesure de Hausdorff de dimension $s$ dans $\mathbb{R}^d$ ( $s \in [0, d]$ )
$H_\Gamma$	: courbure de $\Gamma$
$\nabla_{\Gamma^\cdot}$	: divergence tangentielle sur $\Gamma$

## Chapitre 2

$\mathbb{T}$	: $[0, 2\pi[$
$H^1(\mathbb{T})$	: espace des fonctions de $H_{loc}^1(\mathbb{R})$ , $2\pi$ -périodiques
$u, u_0, v$	: éléments de $H^1(\mathbb{T})$
$(r, \theta)$	: coordonnées polaires, dans $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$
$\Omega_u$	: $\left\{ (r, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} ; r < \frac{1}{u(\theta)} \right\}$
$G$	: fonction réelle définie sur $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ (parfois $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ )
$j(u)$	: $J(\Omega_u)$ , parfois $\int_{\mathbb{T}} G(\theta, u(\theta), u'(\theta)) d\theta$
$W^{1,\infty}(\mathbb{T})$	: espace des fonctions de $W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R})$ , $2\pi$ -périodiques
$m(u)$	: $ \Omega_u  = \int_{\mathbb{T}} \frac{1}{2u^2}$
$S_u$	: support de la mesure $u'' + u$ lorsque $u'' + u \geq 0$
$\zeta_0$	: fonction de $H^1(\mathbb{T})$ , multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de convexité.
$\mu_a, \mu_b$	: mesure réelle $2\pi$ -périodique, multiplicateur pour les contraintes $a \leq u \leq b$
$u_0$	: solution optimale pour le problème d'optimisation sur $u$

## Chapitre 3

$\lambda_n(\Omega)$	: $n$ -ième valeur propre du laplacien sur $\Omega$
$H_0^1(\Omega)$	: adhérence de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ pour la norme $H^1$ (si $\Omega$ ouvert)
$cap$	: Capacité $H^1$
$H_0^1(\Omega)$	: $\{v \in H^1(\mathbb{R}^d) / v = 0 \text{ quasi-partout en dehors de } \Omega\}$ (si $\Omega$ mesurable)

### Minimisation de $\lambda_1$ sous contrainte de volume et d'inclusion

$D$	: domaine de $\mathbb{R}^d$ , boîte contenant les formes admissibles
$a$	: volume des formes admissibles
$\mathcal{H}^{d-1} \llcorner Y$	: mesure définie par $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner Y(B) = \mathcal{H}^{d-1}(B \cap Y)$
$u_{\Omega^*} = u$	: première fonction propre sur $\Omega^*$ optimal
$B_R$	: boule de $\mathbb{R}^d$ , de rayon $R$
$\mathcal{F}$	: $\{v \in H_0^1(D), u - v \in H_0^1(B_R)\}$
$J(v)$	: $J(v) = \int_D  \nabla v ^2 - \lambda_a \int_D v^2$
$\Lambda$	: multiplicateur de Lagrange
$x^+$	: $\max(x, 0)$
$\oint_{\partial B} u$	: $\frac{1}{\mathcal{H}^{d-1}(\partial B)} \int_{\partial B} u d\mathcal{H}^{d-1}$
$\int_B u$	: $\frac{1}{ B } \int_B u dx$

**Minimisation de  $\lambda_2$  sous contrainte de volume et de convexité**

Stade	: enveloppe convexe de deux disques tangents de même rayon
$\gamma$ ou $\gamma_-$	: ensemble ouvert des parties strictement convexes de $\partial\Omega^*$
$\Sigma$ ou $\gamma_+$	: segment inclus dans le bord de la forme optimale $\partial\Omega^*$
$\Lambda$	: multiplicateur de Lagrange pour la contrainte de volume
$\mathbb{H}$	: $\{z \in \mathbb{C}; \Im(z) < 0\}$
$\phi$	: application biholomorphe entre $\mathbb{H}$ et $\Omega^*$
$\hat{\cdot}$	: composition par la fonction $\phi$
$(r, \varphi)$	: coordonnées polaires, dans $[0, +\infty[ \times \mathbb{R}$
$\mathcal{N}$	: ligne nodale de la seconde fonction propre du laplacien sur $\Omega^*$
$\Omega_+, \Omega_-$	: ensembles nodaux de la seconde fonction propre du laplacien sur $\Omega^*$

**Résultats numériques**

$\mu$	: constante de pénalisation
$\Omega_k$	: forme obtenue numériquement après $k$ itérations de l'algorithme
$P_D$	: projecteur sur la boîte $D$
$x(n_0), y(n_0)$	: coordonnées approchées du point de contact entre la forme optimale et le bord de la boîte
$\beta$	: régularité obtenue numériquement au voisinage du point de contact

**Chapitre 4**

$u$	: solution d'un problème surdéterminé
$\Omega$	: ouvert de $\mathbb{R}^d$ , borné ou non-borné selon les cas
$\nu$	: vecteur normal à $\partial\Omega$ , quand il est défini
$u_\nu$	: dérivée normale de $u$ sur $\partial\Omega$
$\Gamma$	: partie relativement ouverte de $\partial\Omega$ , partie surdéterminée
$f$	: fonction réelle de la variable réelle, au moins lipschitzienne
$J(\Omega)$	: énergie de Dirichlet pour le second membre 1



# Chapitre 1

## Structure des dérivées de forme autour d'ensembles à périmètre fini

Une partie du travail décrit dans ce chapitre a fait l'objet d'une publication en collaboration dans **Journal of convex analysis** en 2007, voir [91].

L'objet de ce chapitre est de travailler sur les dérivées de forme autour d'ensembles a priori très peu réguliers, à savoir les ensembles à périmètre fini.

Dans un premier paragraphe, à travers des rappels de la définition d'un ensemble à périmètre fini, de l'importance de cette classe d'ensembles en optimisation de forme, et des résultats de structure des dérivées de formes connus dans le cas régulier, on motivera la première question traitée dans cette thèse, à savoir : **qu'en est-il de la structure des dérivées de forme autour d'ensembles à périmètre fini ?** Nous répondons à cette question au second paragraphe, voir théorème 1.3. Ce résultat de structure nous permet d'extraire une définition satisfaisante et encore peu utilisée de signe pour une dérivée de forme. Nous tirons parti de cette nouvelle notion au paragraphe 1.3. Le suivant est consacré aux structures des dérivées secondes, pour lesquelles les résultats restent partiels, mais on est en mesure de traiter le cas des formes critiques (i.e. qui annulent la première dérivée), cas exigeant mais fréquent en optimisation. Enfin, on regroupe en dernière partie deux résultats d'analyse sur des formes optimales, qui sont déjà connus dans la littérature, mais qui nous paraissent éclaircis par les structures de dérivée de forme autour d'ensembles irréguliers. On montre ainsi l'utilisation possible des dérivées de forme autour d'ensembles irréguliers, sur des cas concrets.

### 1.1 Définitions, motivations

#### 1.1.1 Ensemble à périmètre fini

Commençons par rappeler quelques définitions et propriétés classiques de la *théorie géométrique de la mesure* (voir [55], [60] ou [53] pour une étude détaillée).

Étant donné  $\Omega$  un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ , son périmètre est défini par

$$P(\Omega) := \sup \left\{ \int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi ; \varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_N) \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d), \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \left( \sum_{1 \leq i \leq N} \varphi_i^2(x) \right) \leq 1 \right\}.$$

D'après la formule de dualité

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \varphi = - \langle \nabla \chi_{\Omega}, \varphi \rangle_{\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)},$$

où  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)$  est l'espace des distributions sur  $\mathbb{R}^d$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ , dire que  $\Omega$  est à périmètre fini signifie que la distribution  $\nabla \chi_{\Omega}$  est une mesure vectorielle bornée sur  $\mathbb{R}^d$ , et sa masse totale

est donnée par  $P(\Omega)$ . Cette mesure a une décomposition polaire  $\nabla\chi_\Omega = -|\nabla\chi_\Omega|\nu^\Omega$  où  $|\nabla\chi_\Omega|$  est une mesure positive,  $\nu^\Omega \in L^\infty(\mathbb{R}^d, |\nabla\chi_\Omega|)$ , et  $|\nu^\Omega| = 1$   $|\nabla\chi_\Omega|$ -p.p..

Ensuite, on peut définir un représentant ponctuel de  $\nu^\Omega$ , ainsi que le bord réduit de  $\Omega$  de la façon suivante :

**Définition 1.1** Soit  $\Omega$  un ensemble à périmètre fini. Son bord réduit  $\partial^*\Omega$  est défini comme le sous-ensemble des  $x \in \mathbb{R}^d$  tels que  $|\nabla\chi_\Omega|(B(x, \rho)) > 0$  pour tout  $\rho > 0$ , et tels que la limite

$$\nu_\Omega(x) := -\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{|\nabla\chi_\Omega|(B(x, \rho))}{|\nabla\chi_\Omega|(B(x, \rho))}$$

existe dans  $\mathbb{R}^d$  et a une norme euclidienne égale à 1.

Ainsi,  $\nu_\Omega$  est un représentant ponctuel de  $\nu^\Omega$  et peut être interprété comme le vecteur normal généralisé à  $\Omega$  (et orienté vers l'extérieur du domaine). Plus précisément, on a :

**Proposition 1.1** La mesure  $|\nabla\chi_\Omega|$  est portée par  $\partial^*\Omega$ . De plus, elle est la restriction à  $\partial^*\Omega$  de la mesure de Hausdorff de dimension  $d-1$  dans  $\mathbb{R}^d$  :

$$|\nabla\chi_\Omega| = \mathcal{H}^{d-1}|_{\partial^*\Omega},$$

$$i.e., \forall B \text{ Borélien, } |\nabla\chi_\Omega|(B) = \mathcal{H}^{d-1}(\partial^*\Omega \cap B).$$

Enfin,

$$\nabla\chi_\Omega = -|\nabla\chi_\Omega|\nu_\Omega = -\nu_\Omega \mathcal{H}^{d-1}|_{\partial^*\Omega}.$$

Ainsi, on a pu définir une large classe d'ensembles pour lesquels on peut définir un vecteur normal unitaire. L'intérêt de cette classe d'ensembles dans le domaine de l'optimisation de forme est dû à ses propriétés de compacité, utiles pour démontrer un résultat d'existence pour un problème d'optimisation de forme. En effet, on a le résultat suivant :

**Théorème 1.1** Soit  $\Omega_n$  une suite de parties mesurables de  $\mathbb{R}^d$ . On suppose que  $|\Omega_n|$  et  $P(\Omega_n)$  sont bornées. Alors il existe  $\Omega \in \mathbb{R}^d$  mesurable, et une suite extraite  $\Omega_{n_k}$  tels que

$$\chi_{\Omega_{n_k}} \longrightarrow \chi_\Omega \text{ dans } L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$$

et

$$\nabla\chi_{\Omega_{n_k}} \xrightarrow{*} \nabla\chi_\Omega \text{ dans } \sigma(\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)', \mathcal{C}_0(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d))$$

(voir [73] p. 48 pour une preuve, et le chapitre 4 de ce même livre pour quelques résultats et références sur les questions d'existences de formes optimales ; voir aussi l'article [25] pour un récapitulatif des résultats d'existence connus).

### 1.1.2 Propriété de structure des dérivées de forme

On rappelle ici la propriété de structure des dérivées de forme, initialement découverte par Hadamard dans [67] pour un cas particulier, ainsi que des résultats plus récents, qui établissent un cadre général dans lequel cette structure est vérifiée. On commence donc par introduire nos notations.

Si  $\Omega$  est un ensemble mesurable de  $\mathbb{R}^d$ , on introduit de petites perturbations de  $\Omega$  de la forme  $\Omega_\theta := (Id + \theta)(\Omega)$ , où  $Id$  désigne l'application identité de  $\mathbb{R}^d$ , et  $\theta$  est un élément de l'espace

$$\Theta := \{\theta : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d; \theta \text{ est } \mathcal{C}^1, \theta \text{ et } D\theta \text{ sont bornés}\},$$

muni de la norme  $\|\theta\|_{1,\infty} := \sup_{x \in \mathbb{R}^d} |\theta(x)| + \sup_{x \in \mathbb{R}^d} \|D\theta(x)\|$ , où  $\|\cdot\|$  désigne une norme sur les endomorphismes de  $\mathbb{R}^d$ .

On appelle fonction de forme une application

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Omega : \Theta &\rightarrow \mathbb{R} \\ \theta &\mapsto \mathcal{J}_\Omega(\theta) := J((Id + \theta)(\Omega)), \end{aligned}$$

définie sur un voisinage de l'origine, où  $J : \{\Omega_\theta \subset \mathbb{R}^d; \theta \text{ petit}\} \rightarrow \mathbb{R}$  est donnée. On note  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  la différentielle au sens de Fréchet de  $\mathcal{J}_\Omega$  en  $\theta = 0$ , lorsqu'elle existe. On dira dans ce cas que  $J$  est dérivable au sens des formes autour de  $\Omega$ , et que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est la dérivée de forme de  $J$  en  $\Omega$  (sur  $\Theta$ ). Le résultat de structure de Hadamard établit que cette différentielle ne dépend que de la composante normale de la déformation, restreinte au bord de  $\Omega$ . Plus précisément, (voir [67], et aussi [108], [51] p. 349, [73] p. 219, et [109]) :

**Proposition 1.2 (Résultat de structure, cas régulier)** *Soit  $\Omega$  un ouvert de  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $\mathcal{C}^2$  et supposons que  $\mathcal{J}_\Omega$  est (Fréchet-)différentiable en  $\theta = 0$  dans  $\Theta$ . On note  $\nu_\Omega$  le vecteur normal unitaire extérieur à  $\partial\Omega$ . Alors, il existe  $\mathcal{L} : \mathcal{C}^1(\partial\Omega, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$  une forme linéaire continue telle que*

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_{\partial\Omega} \cdot \nu_\Omega), \quad (1.1)$$

où  $\xi|_{\partial\Omega}$  est la restriction de  $\xi$  au bord topologique  $\partial\Omega$  de  $\Omega$ .

**Remarque 1.1** Nous ne donnons pas la preuve de ce résultat, que l'on peut trouver dans les références citées plus haut. Néanmoins, il sera un cas particulier du théorème 1.3 qui établit le même résultat de structure avec des hypothèses plus faibles sur la régularité de  $\Omega$ ; voir remarque 1.7.

Rappelons quand même les considérations géométriques qui mènent à ce résultat : en premier lieu, on constate que par un raisonnement d'algèbre linéaire assez simple, que la propriété de structure se ramène à la suivante :

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \left[ \xi \cdot \nu_\Omega = 0 \Rightarrow \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = 0 \right].$$

On peut voir cette propriété géométriquement : en effet, si  $\xi$  est tangentiel sur  $\partial\Omega$ , alors par résultats classiques sur les équations différentielles (théorème d'invariance de type Nagumo), l'ensemble  $\Omega$  reste invariant par le flot induit par  $\xi$ . Si l'on note  $\gamma_t$  ce flot, on a donc  $\gamma_t(\Omega) = \Omega$  et en particulier  $J(\gamma_t(\Omega)) = J(\Omega)$ , pour tout  $t$ . Mais, à l'ordre 1,  $\gamma_t \cong Id + t\xi$  pour  $t$  proche de 0. Ainsi, en dérivant  $J(\gamma_t(\Omega)) = C^{te}$ , on obtient bien  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = 0$ .

**Remarque 1.2** La structure des dérivées de forme est très fréquemment utilisée. En réalité, lorsqu'on écrit une équation d'Euler-Lagrange pour un problème d'optimisation de forme, on n'écrit pas  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \equiv 0$ , mais plutôt  $\mathcal{L} \equiv 0$  où  $\mathcal{L}$  vient de la structure de  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$ . C'est cette égalité qui contient l'information de l'optimalité.

### 1.1.3 Exemples de dérivées de forme

Sans démonstration, on rappelle quelques exemples de fonctions de forme ayant une dérivée de forme, et on discute de la structure sur ces exemples.

On considère trois exemples classiques :  $V(\Omega) = |\Omega|$  le volume de  $\Omega$ ,  $P(\Omega)$  le périmètre de  $\Omega$  et  $J(\Omega)$  l'énergie de Dirichlet associée au domaine  $\Omega$  et au second membre  $f$  où  $f$  est une fonction de  $L^2(\mathbb{R}^d)$ ; cela signifie que  $J(\Omega) = \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla u_\Omega|^2 - f u_\Omega$  où on a associé à  $\Omega$  l'unique solution du problème

$$u_\Omega \in H_0^1(\Omega), \quad -\Delta u_\Omega = f \text{ dans } \Omega.$$

Par le principe de Dirichlet, on peut aussi définir  $J(\Omega)$  par la formule :

$$J(\Omega) = \min_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_\Omega \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - f v \right\}. \quad (1.2)$$

**Proposition 1.3** *Soit  $\Omega$  un ensemble de  $\mathbb{R}^d$ .*

*On pose  $\mathcal{V}_\Omega(\theta) = V((Id + \theta)(\Omega))$ ,  $\mathcal{P}_\Omega(\theta) = P((Id + \theta)(\Omega))$ ,  $\mathcal{J}_\Omega(\theta) = J((Id + \theta)(\Omega))$ .*

*Alors :*

- si  $\Omega$  est mesurable,  $\mathcal{V}_\Omega$  est différentiable en 0 et

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \mathcal{V}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Omega \nabla \cdot \xi,$$

- si  $\Omega$  est à périmètre fini,  $\mathcal{P}_\Omega$  est différentiable en 0 et

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma \nabla_\Gamma \cdot \xi,$$

- où  $\Gamma := \partial^*\Omega$  et  $\nabla_\Gamma \cdot \xi := \nabla \cdot \xi - (D\xi \cdot \nu_\Omega) \cdot \nu_\Omega$  est la divergence tangentielle de  $\xi$  sur  $\Gamma$ ,
- si  $\Omega$  est mesurable et borné, et  $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ ,  $\mathcal{J}_\Omega$  est différentiable en 0 et

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = - \int_\Omega u'_\Omega f,$$

où  $u'_\Omega = u'_\Omega(0) \cdot \xi$  est la dérivée de forme de  $\omega \mapsto u_\omega \in L^2(\mathbb{R}^d)$  en  $\Omega$  dans la direction  $\xi$ , caractérisée par

$$-\Delta u'_\Omega = 0 \text{ dans } \Omega \text{ et } u'_\Omega + \nabla u_\Omega \cdot \xi \in H_0^1(\Omega).$$

(voir [73], et aussi [60] pour le cas de  $\mathcal{P}_\Omega$  autour d'un ensemble à périmètre fini)

**Remarque 1.3** Comme cette particularité est souvent oubliée, on insiste sur le fait que la différentiabilité établie dans cette proposition ne nécessite aucune régularité du domaine autour duquel on dérive (sauf pour le périmètre, où on demande que le périmètre soit fini, ce qui est une hypothèse très faible de régularité, mais de toute façon, si le périmètre de  $\Omega$  n'est pas fini, on a  $\mathcal{P}_\Omega \equiv \infty$ ).

Pour la fonction d'énergie  $J$ , on rappelle que  $H_0^1(\Omega)$ , habituellement défini pour les ouverts, admet une extension à tout ensemble mesurable :

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) ; v = 0 \text{ quasi-partout en dehors de } \Omega\}$$

(voir par exemple [73] pour cette définition, liée à la notion de capacité). Là encore, ne considérer que la classe des ouverts (pour laquelle le problème paraît naturel), ne permet pas toujours d'avoir suffisamment de compacité pour démontrer l'existence d'une forme optimale. C'est pourquoi il est utile de pouvoir travailler avec des ensembles a priori très peu réguliers (ensembles mesurables, ou aussi ensembles quasi-ouverts).

Dans la littérature, on trouve le plus souvent les formules suivantes, obtenues après intégration par parties. C'est cette étape qui nécessite de la régularité sur  $\Omega$  :

**Proposition 1.4** Avec les notations de la proposition 1.3, en notant  $\Gamma = \partial^*\Omega (= \partial\Omega$  si  $\Omega$  est  $\mathcal{C}^1$ ), et  $\nu_\Omega$  la normale unitaire extérieure, définie sur  $\Gamma$  :

- si  $\Omega$  est à périmètre fini, alors

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{V}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma \xi \cdot \nu_\Omega,$$

- si  $\Omega$  est  $\mathcal{C}^2$ , alors

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma H_\Gamma \xi \cdot \nu_\Omega,$$

où  $H_\Gamma$  désigne la courbure moyenne de  $\Omega$ ,

- si  $\Omega$  est à périmètre fini et  $u_\Omega \in H^2(\Omega)$ , alors

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = - \int_\Omega \nabla \cdot (\xi |\nabla u_\Omega|^2) = - \int_\Gamma |\nabla u_\Omega|^2 \xi \cdot \nu_\Omega.$$

**Remarque 1.4** Sur ces formules, on voit bien la structure apparaître : pour  $\mathcal{V}_\Omega$ ,  $\mathcal{L} \equiv 1$ , pour  $\mathcal{P}_\Omega$ ,  $\mathcal{L} \equiv H_\Gamma$ , et pour  $\mathcal{J}_\Omega$ ,  $\mathcal{L} \equiv -|\nabla u_\Omega|^2$  où on considère l'injection habituelle de  $L^1(\Gamma)$  dans  $\mathcal{C}^0(\Gamma, \mathbb{R})'$ . On constate aussi que ces formules nécessitent un peu de régularité pour avoir un sens, alors que la différentielle, elle, a toujours un sens. Pour le volume par exemple, la régularité demandée ( $\Omega$  à périmètre fini) est à peu près optimale : en effet en général,  $\mathcal{V}'_\Omega(0) = -\nabla \chi_\Omega$  est une distribution d'ordre 1 ; cette distribution définit une mesure (bornée) si et seulement si  $\Omega$  est à périmètre fini, ce qui permet d'appliquer la proposition 1.1.

## 1.2 Cas d'ensembles irréguliers

On répond dans ce paragraphe à la question naturelle soulevée par la partie précédente :

*Que devient le résultat de structure (1.1) lorsque  $\Omega$  est irrégulier ?*

### 1.2.1 Cas général

On rappelle ici l'approche de M. Delfour et J.-P. Zolésio exposée dans [50] (voir aussi [51]).

De manière générale, on a le résultat préliminaire suivant :

**Proposition 1.5** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\mathcal{J}_\Omega$  est différentiable en 0 dans  $\Theta$ . Alors  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est une distribution vectorielle sur  $\mathbb{R}^d$ , d'ordre au plus 1, et dont le support est inclus dans  $\partial\Omega$ .*

(voir par exemple [73] p. 216).

L'approche adoptée dans [50] consiste à généraliser l'approche brièvement décrite dans la remarque 1.1, mais en utilisant des résultats d'invariance par le flot d'une équation différentielle qui ne nécessite pas de régularité, à savoir un théorème de Nagumo (voir par exemple [9]) qui caractérise les ensembles fermés invariants (on fera donc une hypothèse topologique sur les ensembles). Au lieu de considérer les champs tangentiels, ils considèrent la généralisation suivante :

$$L_\Omega := \left\{ \xi \in \Theta : \forall x \in \Omega, \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(x + t\xi(x), \Omega)}{t} = \overline{\lim}_{t \rightarrow 0^+} \frac{d(x - t\xi(x), \Omega)}{t} = 0 \right\},$$

où  $d(x, F)$  est la distance de  $x \in \mathbb{R}^d$  à  $F \subset \mathbb{R}^d$ .

**Théorème 1.2 (Delfour-Zolésio [50], voir aussi [51] p. 348)**

*Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ . On suppose que  $\mathcal{J}_\Omega$  est différentiable en 0 dans  $\Theta$ .*

*Si  $\Omega$  est ouvert ou fermé, alors il existe  $\tilde{\mathcal{L}} \in (\Theta/L_\Omega)'$  telle que*

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \langle \tilde{\mathcal{L}}, \pi\xi \rangle_{(\Theta/L_\Omega)' \times \Theta/L_\Omega}$$

où  $\pi : \Theta \rightarrow \Theta/L_\Omega$  est la surjection canonique de passage au quotient.

**Remarque 1.5** Ce théorème implique la proposition 1.2, comme expliqué dans [51]. Néanmoins, on ne peut pas observer la structure habituelle, puisque la notion de vecteur normal n'a pas de sens ici. De plus, ce résultat nécessite des hypothèses de topologie sur  $\Omega$ , qui ne sont pas toujours vérifiées dans un théorème d'existence de forme optimale.

### 1.2.2 Cas des ensembles à périmètre fini

Dans ce paragraphe, on généralise le résultat de structure rappelé en proposition 1.2, en traitant le cas où  $\Omega$  est à périmètre fini. L'avantage par rapport au résultat du paragraphe précédent est de n'imposer aucune contrainte topologique, et de retrouver la structure habituelle, en remplaçant la normale classique par la normale définie par la théorie de la mesure.

Dans cette partie, on fait l'hypothèse suivante (faible et nécessaire) :

$$\text{pour tout } \theta_1, \theta_2 \in \Theta \text{ petit, } \left[ \Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2} \text{ p.p.} \right] \Rightarrow \left[ \mathcal{J}_\Omega(\theta_1) = \mathcal{J}_\Omega(\theta_2) \right]. \quad (1.3)$$

**Remarque 1.6** Comme  $Id + \theta$  est un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme dès que  $\|\theta\|_{1,\infty}$  est petit, l'hypothèse (1.3) est clairement vérifiée dès que  $\Omega$  est assez régulier ; en effet  $\Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2}$  p.p. implique  $\Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2}$  partout. Quand  $\Omega$  est irrégulier, cette hypothèse est aussi vérifiée par beaucoup de fonctionnelles : cela signifie que  $J$  (ou  $\mathcal{J}_\Omega$ ) est une fonction qui dépend de la fonction caractéristique de  $\Omega_\theta$ , vue comme une classe de fonctions définies p.p.. Même les fonctions d'énergie  $H^1$  comme définies en (1.2) satisfont à cette propriété, sous de faibles conditions sur  $\Omega$ , voir paragraphe 1.3.5.



Pour un ensemble à périmètre fini  $\Omega$ , on peut utiliser les outils de la *théorie géométrique de la mesure*. En particulier, on a vu au paragraphe 1.1.1, qu'on peut définir  $\nu_\Omega$  sur un sous-ensemble du bord topologique, à savoir le bord réduit  $\Gamma := \partial^*\Omega$ .

On introduit ainsi la fonction de restriction

$$\Phi : \xi \in \Theta \mapsto \xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega \in L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1}).$$

On établit donc le résultat suivant (où  $\Phi(\Theta)$  est l'image de  $\Phi$ ) :

**Théorème 1.3** *Soit  $\Omega$  un ensemble à périmètre fini, et  $\Gamma = \partial^*\Omega$  son bord réduit. Alors, il existe une structure d'espace de Banach sur  $\Phi(\Theta)$  telle que, pour toute fonctionnelle de forme  $\mathcal{J}_\Omega$  vérifiant (1.3) et différentiable en  $\theta = 0$ , on a*

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega), \quad (1.4)$$

où  $\mathcal{L}$  est une forme linéaire continue sur  $\Phi(\Theta)$ .

**Remarque 1.7** Lorsque  $\Omega$  est régulier ( $\mathcal{C}^2$ ),  $\Phi(\Theta)$  sera exactement  $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)$  muni de sa norme  $\mathcal{C}^1$ . C'est pourquoi, on peut considérer que ce théorème est une généralisation de la proposition 1.2, puisqu'on a vu en remarque 1.6 que l'hypothèse (1.3) était toujours vérifiée si  $\Omega$  était régulier.

**Remarque 1.8** La norme sur  $\Phi(\Theta)$  est toujours plus forte (ou équivalente) à la norme sur  $L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1})$ . En effet, puisque  $\forall \xi \in \Theta, \|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty := \|\xi \cdot \nu_\Omega\|_{L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1})} \leq \|\xi\|_\infty \leq \|\xi\|_{1,\infty}$ , on a, pour tout  $\varphi \in \Phi(\Theta)$  (voir (1.5) dans la preuve ci-dessous pour la définition de la norme sur  $\Phi(\Theta)$ ),

$$\|\varphi\|_{\Phi(\Theta)} = \inf\{\|\xi\|_{1,\infty}; \xi \cdot \nu_\Omega = \varphi \text{ } \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p.}\} \geq \inf\{\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty; \xi \cdot \nu_\Omega = \varphi \text{ } \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p.}\} = \|\varphi\|_\infty.$$

**Preuve : Étape 1 :**  $\forall \xi \in \Theta, \left[ \xi \cdot \nu_\Omega = 0 \text{ } \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p.} \right] \Rightarrow \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = 0$ .

On fait appel au lemme suivant :

**Lemme 1.1** *Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  à périmètre fini,  $\xi \in \Theta$  et  $\gamma_t$  le flot associé, c'est-à-dire, la solution de*

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, \forall t \in \mathbb{R}, \begin{cases} \frac{d}{dt}\gamma_t(x) &= \xi(\gamma_t(x)), \\ \gamma_0(x) &= x \end{cases}$$

*Alors, au sens des distributions dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$ ,*

$$\frac{\partial}{\partial t}(\chi_\Omega \circ \gamma_t) = \nabla \chi_\Omega \circ \gamma_t \cdot \frac{\partial}{\partial t}\gamma_t = (\nabla \chi_\Omega \cdot \xi) \circ \gamma_t,$$

*ce qui signifie que, pour tout  $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ ,*

$$\begin{aligned} - \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \chi_\Omega \circ \gamma_t &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \varphi d[(\nabla \chi_\Omega \cdot \xi) \circ \gamma_t] \\ &= \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) \det D(\gamma_t^{-1}) \xi \cdot d(\nabla \chi_\Omega) \\ &= - \int_{\partial^*\Omega} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) \det D(\gamma_t^{-1}) (\xi \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^{d-1}. \end{aligned}$$

**Preuve du lemme 1.1 :** Soient  $f_n \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^d)$  telles que

$$f_n \xrightarrow{L^1} \chi_\Omega, \quad \nabla f_n \xrightarrow{(\mathcal{C}_b)'} \nabla \chi_\Omega,$$

où  $\mathcal{C}_b$  est l'espace des fonctions continues bornées de  $\mathbb{R}^d$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors

$$\frac{\partial}{\partial t}(f_n \circ \gamma_t) = \nabla f_n \circ \gamma_t \cdot \frac{\partial}{\partial t}\gamma_t = (\nabla f_n \circ \gamma_t) \cdot (\xi \circ \gamma_t) = (\nabla f_n \cdot \xi) \circ \gamma_t.$$

Avec  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  choisie arbitrairement, on peut réécrire cela de la façon suivante :

$$-\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} f_n \circ \gamma_t = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \varphi (\nabla f_n \cdot \xi) \circ \gamma_t,$$

ou, après changement de variable,

$$-\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \circ \gamma_t^{-1} f_n \det D(\gamma_t^{-1}) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) (\nabla f_n \cdot \xi) \det D(\gamma_t^{-1}).$$

Comme  $\det D(\gamma_t^{-1})$  et  $\xi$  sont continus et  $\varphi$  est  $\mathcal{C}^\infty$  à support compact, on peut passer à la limite dans l'équation et obtenir

$$-\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \circ \gamma_t^{-1} \chi_\Omega \det D(\gamma_t^{-1}) = \int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) \det D(\gamma_t^{-1}) \xi \cdot d\nabla \chi_\Omega.$$

La dernière formule du lemme 1.1 suit, avec la proposition 1.1.  $\square$

Maintenant, soit  $\xi$  dans  $\Theta$  tel que  $\xi \cdot \nu_\Omega = 0$   $\mathcal{H}^{d-1}$ -p.p. sur  $\Gamma$ .

Montrons que  $\gamma_t(\Omega) = \Omega$  p.p. pour tout  $t$ . Il s'ensuivra, avec l'hypothèse (1.3), que  $\mathcal{J}_\Omega(\gamma_t - Id) = J(\gamma_t(\Omega)) = J(\Omega)$  pour tout  $t$  et que  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = 0$  puisque

$$0 = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \mathcal{J}_\Omega(\gamma_t - Id) = \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \gamma_t = \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi.$$

D'après le lemme précédent, on a  $\frac{\partial}{\partial t}(\chi_\Omega \circ \gamma_t) = 0$  au sens des distributions dans  $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d$  car, pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$ ,

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \chi_\Omega \circ \gamma_t = \int_{\partial^* \Omega} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) \det D(\gamma_t^{-1}) (\xi \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^{d-1} = 0.$$

Puisque  $t \rightarrow \chi_\Omega \circ \gamma_t \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$  est continue, il vient  $\chi_\Omega \circ \gamma_t = \chi_\Omega$  p.p. pour tout  $t$ , ce qui donne bien  $\gamma_t(\Omega) = \Omega$  p.p., puisque  $\gamma_{-t} = (\gamma_t)^{-1}$ .

### Étape 2 : Passage au quotient.

Avec le résultat de l'étape précédente, on peut factoriser  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  comme suit :

$$\begin{array}{ccc} \Theta & \xrightarrow{\mathcal{J}'_\Omega(0)} & \mathbb{R} \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\mathcal{L}} & \\ \Theta/K & & \end{array}$$

où  $K := \{\xi \in \Theta, \xi \cdot \nu_\Omega = 0 \text{ } \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p. sur } \Gamma\}$  et  $\pi$  est la projection canonique sur l'espace quotient. Ensuite, l'application

$$\begin{array}{ccc} \Phi : \Theta & \rightarrow & L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1}) \\ \xi & \mapsto & \xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \end{array}$$

induit un isomorphisme (algébrique)  $\tilde{\Phi}$

$$\begin{array}{ccc} \Theta & \xrightarrow{\Phi} & \Phi(\Theta) \\ \pi \downarrow & \nearrow \tilde{\Phi} & \\ \Theta/K & & \end{array}$$

Comme  $K$  est un sous-espace fermé de l'espace de Banach  $\Theta$ ,  $\Theta/K$  est aussi un espace de Banach pour la norme quotient. On choisit de munir l'espace  $\Phi(\Theta) = \tilde{\Phi}(\Theta/K)$  de la norme transportée, à savoir

$$\forall \varphi \in \Phi(\Theta), \|\varphi\| := \|\tilde{\Phi}^{-1}(\varphi)\|_{\Theta/K} = \inf\{\|\xi\|_{1,\infty}; \xi \cdot \nu_\Omega = \varphi \text{ } \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p.}\}, \quad (1.5)$$

ce qui donne une structure d'espace de Banach à  $\Phi(\Theta)$ , et alors  $\tilde{\Phi}$  est une isométrie. On résume cela dans le diagramme suivant :

$$\begin{array}{ccc}
 \Theta & \xrightarrow{\mathcal{J}'_{\Omega}(0)} & \mathbb{R} \\
 \downarrow \pi & \nearrow \tilde{\mathcal{L}} & \\
 \Theta/K & & \\
 \downarrow \tilde{\Phi} & \nearrow \mathcal{L} & \\
 \Phi(\Theta) & & 
 \end{array}$$

Finalement, on pose  $\mathcal{L} := \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{\Phi}^{-1}$ , forme linéaire continue sur  $\Phi(\Theta)$  : on sait que pour tout  $\xi \in \Theta$ ,

$$\mathcal{J}'_{\Omega}(0) \cdot \xi = \tilde{\mathcal{L}}(\pi(\xi)) = \tilde{\mathcal{L}} \circ \tilde{\Phi}^{-1}(\tilde{\Phi} \circ \pi(\xi)) = \mathcal{L}(\Phi(\xi)) = \mathcal{L}(\xi|_{\Gamma} \cdot \nu_{\Omega}).$$

□

**Remarque 1.9** Il peut être intéressant de comparer les deux conditions d'invariance qui ont été considérées, à savoir celle que nous utilisons ici

$$\xi \cdot \nu_{\Omega} = 0 \quad \mathcal{H}^{d-1}\text{-p.p. sur } \partial^* \Omega, \quad (1.6)$$

et la condition de type Nagumo utilisée dans [50], rappelée au paragraphe 1.2.1 (voir aussi [51]). On sait que pour un ensemble fermé  $F$ ,

$$[\forall t, \gamma_t(F) \subset F] \Leftrightarrow [\forall x \in \partial F, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x + t\xi(x), F)}{t} = 0]. \quad (1.7)$$

Ici, la fonction distance n'est pas bien adaptée puisque les ensembles ne sont définis qu'au sens presque partout. Néanmoins, étant donné un ensemble mesurable  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ , il est classique (voir par exemple [60]) d'introduire le "bon" représentant de  $\Omega$  comme étant  $\tilde{\Omega} = (\Omega \cup \Omega_1) \setminus \Omega_0$  où  $\Omega_0, \Omega_1$  sont les ouverts définis par :

$$\Omega_0 = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists r, |\Omega \cap B(x, r)| = 0\}, \quad \Omega_1 = \{x \in \mathbb{R}^d; \exists r, |\Omega \cap B(x, r)| = |B(x, r)|\}.$$

Alors on sait que  $\tilde{\Omega} = \Omega$  p.p. et  $\partial^* \tilde{\Omega} = \partial \tilde{\Omega}$ . D'après notre analyse, la condition (1.6) implique  $\gamma_t(\tilde{\Omega}) = \tilde{\Omega}$  p.p.. Or,  $\gamma_t$  étant un  $\mathcal{C}^1$ -difféomorphisme, il est facile de vérifier que cela implique l'invariance des trois ensembles  $\Omega_1, \mathbb{R}^d \setminus \Omega_0$  et  $\partial \tilde{\Omega}$ . D'après (1.7), ceci est équivalent à

$$\forall x \in \partial \tilde{\Omega}, \lim_{t \rightarrow 0} \frac{d(x + t\xi(x), \partial \tilde{\Omega})}{t} = 0.$$

Inversement, cette condition ne semble pas suffisante en général pour impliquer l'invariance p.p. de  $\Omega$  (ou de  $\tilde{\Omega}$ ) par  $\gamma_t$  (ou d'impliquer (1.6), ce qui est équivalent d'après le lemme 1.1). C'est tout de même le cas si  $\Omega$  (ou  $\tilde{\Omega}$ ) est égal p.p. à un ouvert ou un fermé. En effet, dans ces cas, on aurait respectivement  $\Omega = \Omega_1$  p.p. ou  $\Omega = \mathbb{R}^d \setminus \Omega_0$  p.p.. C'est le cas si, en particulier,  $|\partial \tilde{\Omega}| = 0$ .

### 1.2.3 Quelques exemples

Le théorème 1.3 appliqué à la fonction périmètre permet de définir un objet  $\mathcal{L} = \mathcal{L}_{\Omega}$ , qui généralise la notion de courbure moyenne, et ce pour tout ensemble  $\Omega$  à périmètre fini, puisque cette fonction est différentiable sans condition de régularité. On peut calculer cet objet sur quelques exemples simples.

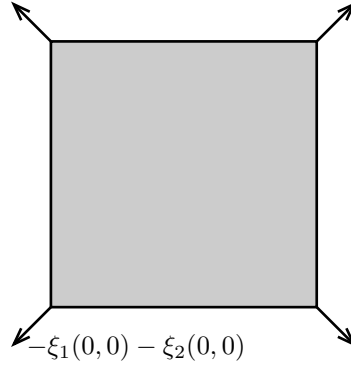


FIG. 1.1 – Dérivée du périmètre autour d'un carré

**Exemple 1** La structure obtenue au théorème 1.3 peut nécessiter quelques transformations pour devenir explicite. Regardons par exemple la fonction périmètre  $P(\cdot)$  autour du carré  $[0, 1]^2 \subset \mathbb{R}^2$ . Des calculs simples donnent, pour un champ  $\xi \in \Theta$  à support compact autour de l'origine :

$$\mathcal{P}'_{\Omega}(0) \cdot \xi = -\xi_1(0, 0) - \xi_2(0, 0) = \delta_{(0,0)}(\xi) \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}. \quad (1.8)$$

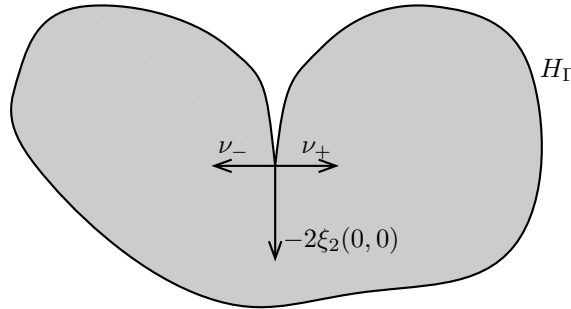
La dépendance en  $\xi \cdot \nu_{\Omega}$  peut paraître surprenante, puisque  $\nu_{\Omega}$  n'est pas définie en  $(0, 0)$ , alors que  $\mathcal{P}'_{\Omega}(0)$  est portée par  $(0, 0)$ . Néanmoins, on peut trouver explicitement la forme linéaire  $\mathcal{L}$  issue de cet exemple :

$$\forall \varphi \in \Phi(\Theta), \quad \mathcal{L}(\varphi) = -\lim_{y \rightarrow 0} \varphi(0, y) - \lim_{x \rightarrow 0} \varphi(x, 0).$$

En effet,  $-\xi_1(0, 0) = \lim_{y \rightarrow 0} \xi \cdot \nu_{\Omega}(0, y)$  puisque  $\nu_{\Omega}(0, y) = (-1, 0)$  si  $0 < y < 1$ , et de même pour  $\xi_2(0, 0)$ . On voit, dans cet exemple, que  $\mathcal{L}$  est continue pour la norme  $L^{\infty}$  (et donc aussi pour la norme  $\Phi(\Theta)$ , d'après la remarque 1.8).

Des calculs similaires peuvent être menés pour un ensemble ayant un angle en un point  $x_0$  du bord. En effet, les limites  $(\nu^-, \nu^+)$  de  $\nu_{\Omega}(\cdot)$  par la droite et la gauche en  $x_0$  forment une base de  $\mathbb{R}^2$  : on peut donc reconstruire n'importe quelle masse de Dirac portée par  $x_0$  dans la contribution de  $\mathcal{L}$ .

**Exemple 2** La situation est différente lorsque  $\Omega$  possède un *point de rebroussement* au bord, car alors  $(\nu^-, \nu^+)$  n'est plus une base. Regardons ce qui se passe lorsque  $\Omega$  est, au voisinage de l'origine, l'ensemble situé sous le graphe de  $y = f(x) = |x|^{\alpha}$  dans  $\mathbb{R}^2$  ( $\alpha \in ]0, 1[$ ).

FIG. 1.2 – Dérivée du périmètre autour d'un point de rebroussement (*cusp*)

Les calculs donnent (voir l'exemple suivant), pour tout  $\xi \in \Theta$  à support dans le voisinage de l'origine

$$\mathcal{P}'_{\Omega}(0) \cdot \xi = \int_{\Gamma} H_{\Gamma} \xi \cdot \nu_{\Omega} d\mathcal{H}^1 - 2\xi_2(0, 0),$$

où  $H_\Gamma$  est la courbure moyenne, définie et intégrable sur les parties régulières  $\partial\Omega \setminus \{(0,0)\}$ . Dans ce cas, on peut montrer que  $\mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi \cdot \nu_\Omega)$  avec

$$\forall \varphi \in \Phi(\Theta), \mathcal{L}(\varphi) = \int_\Gamma H_\Gamma \varphi d\mathcal{H}^1 - \lim_{x \rightarrow 0^+} [\varphi(x, |x|^\alpha) + \varphi(-x, |x|^\alpha)] \alpha |x|^{\alpha-1}.$$

En effet, pour  $x \neq 0$

$$[\xi \cdot \nu_\Omega](x, f(x)) = \left[ \xi_1(x, f(x)) f'(x) - \xi_2(x, f(x)) \right] / \sqrt{1 + (f'(x))^2},$$

de sorte que

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [\xi \cdot \nu_\Omega](x, x^\alpha) = \xi_1(0, 0), \quad \lim_{x \rightarrow 0^-} [\xi \cdot \nu_\Omega](x, |x|^\alpha) = -\xi_1(0, 0),$$

tandis que, en utilisant  $\xi \in \mathcal{C}^1$ ,

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} |x|^{\alpha-1} [(\xi \cdot \nu_\Omega)(x, |x|^\alpha) + (\xi \cdot \nu_\Omega)(-x, |x|^\alpha)] = -2\alpha^{-1} \xi_2(0, 0). \quad (1.9)$$

**Exemple 3 Courbes régulières par morceaux :** On peut généraliser les calculs précédents (Exemples 1-2) à tout ensemble  $\Omega$  borné par une courbe fermée et régulière par morceaux dans le sens suivant : le bord  $\partial\Omega$  orienté positivement et paramétré par l'abscisse curviligne est l'image d'une application continue  $\zeta : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}^2$  telle qu'il existe une subdivision  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_p = L$ , telle que pour tout  $i = 1, \dots, p$ ,

$$\zeta \in \mathcal{C}^1([s_{i-1}, s_i]) \cap W^{2,1}(s_{i-1}, s_i), \quad H_\Gamma \in L^1(\zeta([s_{i-1}, s_i])).$$

De plus, on demande que  $\zeta$  soit injective sur  $]0, L]$  et  $\zeta(0) = \zeta(L)$ .

Alors,  $[\xi \in \Theta \rightarrow T(\xi) := \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi - \int_\Gamma H_\Gamma \xi \cdot \nu_\Omega d\mathcal{H}^1]$  est une distribution, d'ordre au plus 1, portée en les points singuliers. Afin de la déterminer, supposons  $\xi$  supportée par un voisinage de  $\zeta_i = \zeta(s_i)$ . Alors, de l'expression de  $P((Id + t\xi)(\Omega))$ , on déduit rapidement que

$$t^{-1}[P((Id + t\xi)(\Omega)) - P(\Omega)] = \varepsilon(t) + \int_{s_{i-1}}^{s_{i+1}} [x'(s) \frac{d}{ds} \xi_1(\zeta(s)) + y'(s) \frac{d}{ds} \xi_2(\zeta(s))] ds.$$

En intégrant par parties sur  $]s_{i-1}, s_i[$  et  $]s_i, s_{i+1}[$ , et en soustrayant les parties régulières, on obtient

$$T(\xi) = [x'(s_i^-) - x'(s_i^+)] \xi_1(\zeta_i) + [y'(s_i^-) - y'(s_i^+)] \xi_2(\zeta_i) = \xi(\zeta_i) \cdot [\zeta'(s_i^-) - \zeta'(s_i^+)].$$

On résume cela de la manière suivante :

**Proposition 1.6** *Avec les notations et hypothèses ci-dessus,*

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma H_\Gamma (\xi \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^1 + \sum_i \xi(\zeta_i) \cdot [\zeta'(s_i^-) - \zeta'(s_i^+)].$$

Le dernier terme de l'expression ci-dessus dépend des *composantes tangentielles* de  $\xi$  en les points singuliers. Bien que cela ne soit pas évident, le Théorème 1.3 nous dit que c'est aussi une fonction de  $\xi|_{\partial^*\Omega} \cdot \nu_\Omega$ . Cela nous est donné explicitement dans les exemples 1-2. On cite [61] pour des calculs similaires, et [96] pour des résultats de dérivation autour de fissures, où les composantes tangentielles apparaissent aussi. On réfère au paragraphe 1.5 pour des calculs similaires en dimension plus grande que 2.

### 1.3 Notion de positivité des dérivées de forme

La structure que nous avons obtenue nous permet de définir une notion de positivité naturelle pour une dérivée de forme (la fonctionnelle  $\mathcal{L}$  est à valeur mono-dimensionnelle, alors que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  était vectorielle).

### 1.3.1 Définition

**Définition 1.2 (Positivité de la dérivée de forme)** On dit que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est positive (et on note  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \geq 0$ ) lorsque, pour tout  $\xi \in \Theta$

$$\left[ \xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega \geq 0 \text{ } \mathcal{H}^{d-1} - \text{p.p. sur } \Gamma \right] \Rightarrow \left[ \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \mathcal{L}(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega) \geq 0 \right]. \quad (1.10)$$

Cela équivaut à la positivité, en tant que distribution scalaire, de  $\mathcal{L}$  qui vient de la structure de  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$ .

Bien sûr, on peut démontrer que c'est le cas dès que  $J$  est croissante pour l'inclusion p.p. :

**Lemme 1.2** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  à périmètre fini, et  $\mathcal{J}_\Omega$  une fonction de forme satisfaisant (1.3) et différentiable en  $\theta = 0$ . Si pour tout  $\theta \in \Theta$  petit, on a

$$[\Omega \subset \Omega_\theta \text{ p.p.}] \Rightarrow [\mathcal{J}_\Omega(0) \leq \mathcal{J}_\Omega(\theta)],$$

alors  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \geq 0$  dans le sens de (1.10).

**Preuve :** Soit  $\xi \in \Theta$  avec  $\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega \geq 0$   $\mathcal{H}^{d-1}$ -p.p. sur  $\Gamma$ , et notons  $\gamma_t$  son flot. Avec le lemme 1.1, on obtient pour tout  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d)$  avec  $\varphi \geq 0$ ,

$$\int_{\mathbb{R} \times \mathbb{R}^d} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \chi_\Omega \circ \gamma_t = \int_{\partial^* \Omega} (\varphi \circ \gamma_t^{-1}) \det D(\gamma_t^{-1})(\xi \cdot \nu_\Omega) d\mathcal{H}^{d-1} \geq 0 \text{ pour } t \text{ petit}.$$

On en déduit que  $\frac{\partial}{\partial t} \chi_\Omega \circ \gamma_t \leq 0$ , et il s'ensuit que pour tout  $t \geq 0$ ,  $\chi_\Omega \circ \gamma_t \leq \chi_\Omega$  p.p., c'est-à-dire  $\Omega \subset \gamma_t(\Omega)$  p.p.. Par monotonie de  $\mathcal{J}_\Omega$ , on obtient  $\mathcal{J}_\Omega(0) \leq \mathcal{J}_\Omega(\gamma_t - Id)$ , et en dérivant en  $t = 0$ , on obtient  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi \geq 0$  (voir l'étape 1 dans la preuve du Théorème 1.3).  $\square$

### 1.3.2 Positivité implique continuité

On voudrait tirer parti d'une propriété de positivité de la dérivée de forme, afin d'avoir une continuité  $L^\infty$  pour la forme linéaire  $\mathcal{L}$ . En effet, on se rappelle du résultat bien connu qu'une distribution positive est en fait une mesure. *Est-ce encore le cas pour les dérivées de forme ?*

Le résultat n'est pas toujours aussi simple ; il est vrai si l'on suppose un peu de régularité de  $\Omega$ , par exemple  $\Omega$  à bord lipschitzien, et cela est à peu près optimal, puisqu'on exhibe un contre-exemple à cette propriété dans le paragraphe suivant, pour un domaine possédant un point de rebroussement.

**Proposition 1.7** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ensemble à périmètre fini tel que

$$\exists \xi_0 \in \Theta \text{ avec } \xi_0|_{\partial^* \Omega} \cdot \nu_\Omega \geq \eta \text{ } \mathcal{H}^{d-1} - \text{p.p. sur } \partial^* \Omega \text{ pour un certain } \eta > 0. \quad (1.11)$$

Si une dérivée de forme  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est positive dans le sens de (1.10), alors il existe une constante  $M \geq 0$  telle que

$$\forall \xi \in \Theta, \quad |\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi| \leq M \|\xi|_{\partial^* \Omega} \cdot \nu_\Omega\|_{L^\infty(\partial^* \Omega, \mathcal{H}^{d-1})}.$$

En particulier, la distribution  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est d'ordre 0, c'est-à-dire une mesure vectorielle (supportée par  $\partial\Omega$ ).

**Preuve :** Soit  $\xi \in \Theta$ ,  $\Gamma = \partial^* \Omega$ ,  $\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty := \|\xi \cdot \nu_\Omega\|_{L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1})}$ ,  $\zeta_0 := \xi_0|_\Gamma \cdot \nu_\Omega$ . On peut écrire

$$-\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty \frac{\zeta_0}{\eta} \leq \xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega \leq \|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty \frac{\zeta_0}{\eta}.$$

Par positivité et linéarité de  $\mathcal{L}$ , on en déduit

$$-\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty \frac{\mathcal{L}(\zeta_0)}{\eta} \leq \mathcal{L}(\xi \cdot \nu_\Omega) \leq \|\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega\|_\infty \frac{\mathcal{L}(\zeta_0)}{\eta},$$

ce qui donne le résultat avec  $M := \mathcal{L}(\zeta_0)/\eta$ .  $\square$

**Remarque 1.10** La condition (1.11) demande un peu de régularité. En effet, si  $\partial\Omega$  contient un point de rebroussement, (1.11) n'est pas vérifiée (voir paragraphe 1.3.3 ci-dessous). Néanmoins,

**Proposition 1.8** *Si  $\Omega$  est un ouvert borné à bord lipschitzien, alors  $\Omega$  satisfait (1.11).*

**Preuve :** Étant donné  $x \in \partial\Omega$ , à changement de coordonnées près, on peut supposer que  $\partial\Omega$  est localement le graphe d'une fonction lipschitzienne  $f^x : \Omega_x \subset \mathbb{R}^{d-1} \rightarrow \mathbb{R}$  sur un voisinage  $x \in \partial\Omega$  et  $\Omega$  est localement en dessous de ce graphe. Le vecteur normal  $\nu_\Omega$  est donné par  $\nu_\Omega(x', f^x(x')) = (-\nabla f^x(x'), 1)/\sqrt{|\nabla f^x(x')|^2 + 1}$  et donc, si  $\xi_0(x', x_N) = (0, 1)$ , on a, sur  $\partial\Omega$  :

$$(\xi_0 \cdot \nu_\Omega)(x', x_N) = 1/\sqrt{|\nabla f^x(x')|^2 + 1} \geq 1/\sqrt{\|\nabla f^x\|_\infty^2 + 1} =: \eta > 0.$$

En utilisant la compacité de  $\partial\Omega$  et une partition régulière de l'unité, on construit un champ de vecteur global  $\xi_0$  satisfaisant (1.11).  $\square$

### 1.3.3 Contre-exemple

L'exemple qui suit montre que si le caractère lipschitzien n'est pas vérifié pour le bord, non seulement l'hypothèse (1.11) peut ne pas être satisfaite, mais de plus, la positivité de  $\mathcal{L}$  peut ne pas impliquer sa continuité  $L^\infty$ .

On considère à nouveau l'exemple 2 du paragraphe 1.2.3 avec un point de rebroussement. On a vu dans cet exemple que

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma H_\Gamma \xi \cdot \nu_\Omega d\mathcal{H}^1 - 2\xi_2(0, 0) = \mathcal{L}(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega).$$

On introduit la fonction de forme

$$\mathcal{J}_\Omega(\theta) = P(\Omega_\theta) - \int_{\Omega_\theta} H(z) dz,$$

où  $H$  est un prolongement à  $\mathbb{R}^2$  de  $H_\Gamma$  donné par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, H(x, y) = f''(x)[1 + f'(x)^2]^{-3/2} = \alpha(\alpha - 1)|x|^{\alpha-2}[1 + \alpha^2|x|^{2\alpha-2}]^{-\frac{3}{2}}.$$

Ainsi,  $\frac{\partial H}{\partial x} \sim_{x \rightarrow 0} Cx^{-2\alpha}$  de sorte que  $H \in W_{loc}^{1,1}(\mathbb{R}^2)$  si  $\alpha < 1/2$  (ce que nous supposons). Cela suffit pour différentier  $\mathcal{J}_\Omega$  et on obtient

$$\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = -2\xi_2(0, 0) = \mathcal{L}_1(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega)$$

où l'existence de  $\mathcal{L}_1$  est donnée par le théorème 1.3.

La distribution  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  est d'ordre 0 (masse de Dirac). Elle est aussi **positive** car, d'après (1.9),

$$\left[ \xi \cdot \nu_\Omega \geq 0 \text{ sur } \partial\Omega \setminus (0, 0) \right] \Rightarrow -\xi_2(0, 0) \geq 0.$$

Pourtant,  $\mathcal{L}_1$  n'est pas continue pour la norme uniforme. En effet, soit  $\rho \in \mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^2)$ ,  $0 \leq \rho \leq 1$  à support dans  $B(0, \eta)$ , tel que  $\rho \equiv 1$  sur  $B(0, \eta/2)$ . On choisit  $\xi = (0, 1)\rho$ , et alors  $\xi_2(0, 0) = 1$ , tandis que

$$\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty \leq \sup_{|x| \leq \eta} [1 + \alpha^2|x|^{2\alpha-2}]^{-1/2} = [1 + \alpha^2\eta^{2\alpha-2}]^{-1/2} \rightarrow 0 \text{ quand } \eta \rightarrow 0,$$

de sorte qu'il ne peut pas exister  $M$  tel que

$$\forall \xi \in \Theta, |\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi| = 2|\xi_2(0, 0)| \leq M\|\xi \cdot \nu_\Omega\|_\infty.$$

### 1.3.4 Périmètre autour d'un ensemble convexe, ou pseudo-convexe

Nous allons appliquer les résultats sur la positivité à la fonction périmètre autour des ensembles convexes.

**Proposition 1.9** *Soit  $C$  un ensemble convexe borné de  $\mathbb{R}^d$ . On pose  $\mathcal{P}_C(\theta) = P((Id + \theta)(C))$ . Alors  $\mathcal{P}'_C(0)$  est positive.*

**Preuve :** (Voir aussi [30] pour une approche différente). D'après le lemme 1.2, il suffit de montrer que pour tout  $\theta \in \Theta$  petit,

$$[C \subset C_\theta] \Rightarrow [P(C) \leq P(C_\theta)].$$

Pour cela, on utilise la propriété suivante, dont la preuve est donnée après :

$$\forall D \subset \mathbb{R}^d \text{ mesurable, borné, } \forall H \subset \mathbb{R}^d \text{ demi-plan fermé, } P(D \cap H) \leq P(D). \quad (1.12)$$

Par ailleurs  $\overline{C} = \bigcap_{n \geq 0} H_n$  où  $H_n$  sont des demi-espaces fermés. Pour la suite définie par :  $\forall n \geq 0, D_{n+1} = D_n \cap H_n; D_0 = C_\theta$ , on obtient alors

$$P(D_{n+1}) \leq P(D_n), P(C) = P(\overline{C}) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} P(D_n) \leq P(C_\theta).$$

□

#### Une preuve de (1.12) :

On se place dans le système de coordonnées  $(x', x_N) \in \mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$  de sorte que  $H = \{x_N \leq 0\}$ . Pour  $t \in ]0, 1]$ , on pose

$$f_t(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in H \\ (x', tx_N) & \text{si } x \in H^c. \end{cases}$$

Vérifions : (i)  $P(f_t(D)) \leq P(D)$  et (ii)  $\chi_{f_t(D)}$  converge p.p. vers  $\chi_{D \cap H}$  quand  $t$  tend vers  $0^+$ . Alors  $P(D \cap H) \leq P(D)$  sera conséquence de la semi-continuité inférieure de  $P(\cdot)$ . Le point (ii) découle facilement du fait que  $D$  est borné. Pour (i), on commence par remarquer

$$|\nabla \chi_D|(H) = \int_{\partial^* D \cap H} d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial^* f_t(D) \cap H} d\mathcal{H}^{d-1} = |\nabla \chi_{f_t(D)}|(H).$$

Ensuite, en posant  $\varphi \in \mathcal{C}_c^\infty(H^c)$  avec  $\|\varphi(x)\| \leq 1$  pour tout  $x \in H^c$ , on a

$$\int_{f_t(D) \cap H^c} \nabla \cdot \varphi(x) dx = \int_{D \cap H^c} t \nabla \cdot \varphi(x', tx_N) dx = \int_{D \cap H^c} \nabla \cdot \psi(x', x_N) dx,$$

où l'on a posé  $\psi(x', x_N) = (t\varphi_1(x', tx_N), \dots, t\varphi_{d-1}(x', tx_N), \varphi_N(x', tx_N))$ . Comme  $\|\psi(x)\| \leq 1$ , on en déduit

$$\int_{f_t(D) \cap H^c} \nabla \cdot \varphi(x) dx \leq |\nabla \chi_D|(H^c).$$

Or,  $\varphi$  étant arbitraire dans  $\mathcal{C}_c^\infty(H^c)$  où  $H^c$  est ouvert, il vient  $|\nabla \chi_{f_t(D)}|(H^c) \leq |\nabla \chi_D|(H^c)$ . □

De cette propriété de monotonie, on en déduit le théorème suivant :

**Théorème 1.4** *Soit  $C$  un ensemble borné et convexe de  $\mathbb{R}^d$ . Alors il existe  $M > 0$  tel que*

$$\forall \xi \in \Theta, |\mathcal{P}'_C(0) \cdot \xi| \leq M \|\xi|_{\partial C} \cdot \nu_C\|_{L^\infty(\partial C, \mathcal{H}^{d-1})}. \quad (1.13)$$

En particulier, il existe une mesure  $\vec{H}$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  et à support dans  $\partial C$ , telle que

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{P}'_C(0) \cdot \xi = \int_{\partial C} \nabla_{\partial C} \cdot \xi d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\partial C} \xi \cdot d\vec{H}. \quad (1.14)$$



**Remarque 1.11** L'existence d'une *courbure moyenne mesure*  $\vec{\mathbf{H}}$  est naturelle pour un ensemble convexe. Une preuve de cette existence peut être trouvée dans [13] (par une méthode différente). Ici, on l'obtient en tant que représentant de la dérivée du périmètre; de plus, l'existence de cette mesure de Radon est obtenue par un moyen plus élémentaire, uniquement avec la positivité de la forme linéaire  $\mathcal{L}(\cdot)$  : précisons aussi que la seconde partie du théorème est une conséquence immédiate de la première puisqu'elle implique

$$\forall \xi \in \Theta, \quad |\mathcal{P}'_C(0) \cdot \xi| \leq k \|\xi\|_{L^\infty(\partial C, \mathcal{H}^{d-1})} \leq k \|\xi\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d, \mathbb{R}^d)},$$

et l'existence de  $\vec{\mathbf{H}}$  suit. Néanmoins, l'estimation (1.13) est plus précise que la seule existence de  $\vec{\mathbf{H}}$ .

**Preuve du Théorème 1.4.** Un ensemble borné convexe a un bord lipschitzien. On applique les propositions 1.9, 1.8, 1.7 pour obtenir l'estimation (1.13). Ensuite (1.14) suit directement, comme expliqué dans la remarque 1.11.  $\square$

**Corollaire 1.1** Si  $\Omega$  est un polygone (ouvert) connexe de  $\mathbb{R}^2$ , alors  $\mathcal{P}'_\Omega(0)$  est une mesure, et on a même

$$\forall \xi \in \Theta, \quad |\mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot \xi| \leq M \|\xi|_{\partial^* \Omega} \cdot \nu_\Omega\|_{L^\infty(\partial^* \Omega, \mathcal{H}^{d-1})}$$

pour une constante  $M \geq 0$ .

**Preuve :**  $\Omega$  est localement convexe ou concave, donc localement  $\mathcal{L}$  a un signe. Par le théorème 1.4, elle est localement continue pour la norme  $L^\infty$ . En utilisant une partition de l'unité, on trouve le résultat annoncé.  $\square$

Les résultats précédents peuvent être étendus aux ensembles “pseudo-convexes” dans l'esprit de [13] : de plus, notre approche permet de considérer des ensembles lipschitziens (au lieu de  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  dans [13]).

**Proposition 1.10** Soit  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  un ouvert borné à bord lipschitzien. Supposons que  $\Omega$  est pseudo-convexe, c'est-à-dire, avec les notations de la preuve de la Proposition 1.8 : pour tout  $x \in \partial\Omega$  et pour tout  $v : \Omega_x \rightarrow \mathbb{R}$  lipschitzienne, positive et à support compact,

$$\int_{\Omega_x} \sqrt{1 + |\nabla f^x(x')|^2} dx' \leq \int_{\Omega_x} \sqrt{1 + |\nabla[f^x + v](x')|^2} dx'. \quad (1.15)$$

Alors les conclusions du Théorème 1.4 sont encore valables.

**Preuve :** Comme pour la preuve du théorème 1.4, il suffit de montrer que  $\mathcal{P}'_\Omega(0) \geq 0$ . D'après le lemme 1.2 (et sa preuve) et par localisation (en utilisant une partition de l'unité), il suffit de montrer que, pour  $\eta$  et  $t$  petits,

$$\left[ \xi \cdot \nu_\Omega \geq 0 \text{ on } \partial\Omega, \text{ Supp}(\xi) \subset B(x, \eta) \right] \Rightarrow \left[ P(\gamma_t(\Omega)) \geq P(\Omega) \right].$$

En se rapportant à la preuve du lemme 1.2, on obtient  $\Omega \subset \gamma_t(\Omega)$  si  $\xi \cdot \nu_\Omega \geq 0$ . Mais  $\partial\gamma_t(\Omega)$  est aussi le graphe d'une fonction lipschitzienne  $v : \Omega_x \rightarrow [0, +\infty)$  : en effet, on note

$$\gamma_t(x', f^x(x')) = (\gamma'(x', f^x(x')), \gamma_N(x', f^x(x'))),$$

et  $x' \rightarrow \gamma'(x', f^x(x'))$  est localement un difféomorphisme bi-lipschitzien puisque  $D_x \gamma_t(x)$  est proche de l'identité ( $t$  petit) et  $f^x$  est lipschitzienne. Alors l'inégalité (1.15) dit exactement  $P(\gamma_t(\Omega)) \geq P(\Omega)$ , ce qui permet de conclure comme au théorème 1.4.  $\square$

**Remarque 1.12** Étant donné un ensemble  $\Omega$  à périmètre fini de bord  $\Gamma = \partial^*\Omega$ , et si l'on sait que  $\mathcal{P}'_\Omega(0)$  est une mesure, alors on peut avoir, par le théorème de décomposition des mesures de Lebesgue :

$$\mathcal{P}'_\Omega(0) = \vec{\mathbf{H}} d\mathcal{H}^{d-1}_\Gamma + \vec{n} d\sigma,$$

où  $\vec{\mathbf{H}} = \frac{d\mathcal{P}'_\Omega(0)}{d\mathcal{H}^{d-1}_\Gamma} \in L^1_{loc}(\partial\Omega, d\mathcal{H}^{d-1})$  (dérivée de Radon-Nikodym), et  $\vec{n} d\sigma \perp d\mathcal{H}^{d-1}_\Gamma$ . On pourra se référer à [3], [122] ou [38]. La formule donnée en proposition 1.6 donne explicitement cette structure pour une courbe régulière par morceaux (voir les calculs du paragraphe 1.5 pour le cas de la dimension supérieure ou égale à 3).

### 1.3.5 Autres exemples

#### 1.3.5.1 Intégrales sur le bord

On peut considérer les généralisations suivantes de la fonction périmètre :  $\theta \rightarrow \mathcal{J}_\Omega(\theta) = \int_{\Gamma_\theta} g d\mathcal{H}^{d-1}$  où  $\Gamma = \partial^*\Omega$  et  $g \in C^1(\mathbb{R}^d)$ , avec  $(g, \nabla g)$  borné. Par changement de variable, (voir [73] pour le cas régulier, et [60] pour le cas des ensembles à périmètre fini que nous utilisons ici), nous obtenons :

$$\forall \theta \text{ tel que } \|\theta\|_{1,\infty} < 1, \quad \mathcal{J}_\Omega(\theta) = \int_\Gamma g \circ (Id + \theta) Jac_\Gamma(Id + \theta) d\mathcal{H}^{d-1},$$

où  $Jac_\Gamma T = |det(DT)| \cdot |{}^tDT^{-1} \cdot \nu_\Omega|$ . On peut montrer (comme dans le cas régulier décrit dans [73]) que cette fonctionnelle est différentiable en  $\theta = 0$ . En utilisant

$$Jac_\Gamma(Id + t\xi) = 1 + t\nabla_\Gamma \cdot \xi + o(t), \quad g \circ (Id + t\xi) = g + t\nabla g \cdot \xi + o(t),$$

on obtient

$$\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma \nabla g \cdot \xi + g \nabla_\Gamma \cdot \xi.$$

Réécrivons cela avec les formules suivantes :

$$\nabla g \cdot \xi + g \nabla_\Gamma \cdot \xi = \nabla g \cdot \xi + \nabla_\Gamma \cdot (g\xi) - \nabla_\Gamma g \cdot \xi = (\nabla g \cdot \nu_\Omega)(\nu_\Omega \cdot \xi) + \nabla_\Gamma \cdot (g\xi).$$

$$\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_\Gamma (\nabla g \cdot \nu_\Omega)(\xi \cdot \nu_\Omega) + \int_\Gamma \nabla_\Gamma \cdot (g\xi) = \int_\Gamma (\nabla g \cdot \nu_\Omega)(\xi \cdot \nu_\Omega) + \mathcal{P}'_\Omega(0) \cdot (g\xi).$$

Si  $\mathcal{L}_g, \mathcal{L}_1$  sont respectivement les formes linéaires associées à  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  et  $\mathcal{P}'_\Omega(0)$  par le théorème 1.3, on obtient

$$\forall \varphi \in \Phi(\Theta), \quad \mathcal{L}_g(\varphi) = \int_\Gamma (\nabla g \cdot \nu_\Omega) \varphi + \mathcal{L}_1(g\varphi).$$

En conséquence, si  $\nabla g$  est borné,  $\mathcal{L}_g$  est continu pour la norme  $L^\infty$  si et seulement si  $\mathcal{L}_1$  l'est. C'est le cas si par exemple  $\Omega = C$  est un ensemble convexe, et alors (par le théorème 1.4),

$$\mathcal{J}'_C(0) \cdot \xi = \int_{\partial C} (\nabla g \cdot \nu_C)(\xi \cdot \nu_C) + \int_{\partial C} g \xi \cdot d\vec{\mathbf{H}}.$$

#### 1.3.5.2 Énergie de Dirichlet

Pour  $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ , on peut associer, à chaque  $\Omega$  ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , la solution du problème de Dirichlet

$$u_\Omega \in H^1_0(\Omega), \quad -\Delta u_\Omega = f \text{ sur } \Omega, \quad (1.16)$$

et son énergie de Dirichlet

$$J(\Omega) = \int_\Omega \frac{1}{2} (|\nabla u_\Omega|^2 - f u_\Omega) = -\frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u_\Omega|^2. \quad (1.17)$$

La dernière égalité s'obtient en multipliant (1.16) par  $u_\Omega$  et en intégrant par parties. On constate aussi que

$$J(\Omega) = \min \left\{ \int_{\Omega} \frac{1}{2} (|\nabla v|^2 - f v) ; v \in H_0^1(\Omega) \right\}. \quad (1.18)$$

Pour  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  donné, analysons la dérivée de forme de  $\theta \in \Theta \rightarrow \mathcal{J}_\Omega(\theta) := J(\Omega_\theta)$ .

Comme déjà rappelé au paragraphe 1.1.3, pour chaque ouvert borné  $\Omega$ ,  $[\theta \in \Theta \mapsto \mathcal{J}_\Omega(\theta)]$  est Fréchet-différentiable en  $\theta = 0$ , ce qui ne nécessite pas de régularité de  $\Omega$ .

La structure de cette dérivée est donnée par le théorème 1.3 dès que  $\mathcal{J}_\Omega(\theta)$  ne dépend que de  $\chi_{\Omega_\theta}$ , i.e. dès que  $J$  satisfait (1.3). C'est le cas si  $\Omega$  est régulier, puisqu'alors  $\Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2}$  p.p. implique  $\Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2}$  partout (on utilise ici que  $Id + \theta_1, Id + \theta_2$  sont des difféomorphismes).

Décrivons une notion optimale et très faible de régularité de  $\Omega$  pour laquelle (1.3) vaut encore pour l'énergie de Dirichlet. Rappelons d'abord quelques définitions : si  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est seulement mesurable et borné, (voir par exemple [73])

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d); v = 0 \text{ quasi-partout en dehors de } \Omega\}, \quad (1.19)$$

$$\widehat{H}_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d); v = 0 \text{ presque partout en dehors de } \Omega\}. \quad (1.20)$$

Il est bien connu que la "bonne" extension pour la définition de  $H_0^1(\Omega)$  dans des cas non réguliers est donnée par (1.19), où "*quasi-partout*" signifie "partout sauf sur un ensemble de capacité nulle", pour la capacité usuelle sur  $H^1(\mathbb{R}^d)$ . En particulier, cela coïncide avec la définition habituelle pour tout ouvert borné  $\Omega$ . La seconde définition, (différente en général, et qui donne un espace plus grand) s'est aussi avérée utile en optimisation de forme, grâce à la simplicité de sa définition, et aussi parce qu'on peut éventuellement être amené à travailler avec des  $\Omega$  suffisamment réguliers pour satisfaire

$$\widehat{H}_0^1(\Omega) = H_0^1(\Omega). \quad (1.21)$$

Ici, nous adoptons ce second point de vue *et nous supposons que  $\Omega$  satisfait (1.21)*. Alors pour  $\theta$  petit dans  $\Theta$ , comme  $Id + \theta$  est un difféomorphisme, il est facile de vérifier que  $\Omega_\theta$  satisfait aussi (1.21); il s'ensuit que l'énergie de Dirichlet  $\theta \mapsto \mathcal{J}_\Omega(\theta) = J(\Omega_\theta)$ , où  $J$  est définie selon (1.17), satisfait l'hypothèse (1.3). En effet, on a, pour tout  $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$ ,

$$[\Omega_{\theta_1} = \Omega_{\theta_2} \text{ p.p.}] \Rightarrow [\widehat{H}_0^1(\Omega_{\theta_1}) = \widehat{H}_0^1(\Omega_{\theta_2})] \Rightarrow [H_0^1(\Omega_{\theta_1}) = H_0^1(\Omega_{\theta_2})] \Rightarrow [J(\Omega_{\theta_1}) = J(\Omega_{\theta_2})].$$

Et donc nous avons le résultat suivant, dans l'esprit du théorème 1.3 :

**Proposition 1.11** *Soit  $\Omega$  mesurable, borné, à périmètre fini, et satisfaisant (1.21). Alors, il existe  $\mathcal{L} : \Phi(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$  forme linéaire continue et **positive** telle que*

$$\forall \xi \in \Theta, \quad \mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = -\mathcal{L}(\xi|_{\partial^* \Omega} \cdot \nu_\Omega).$$

*Enfin, si  $\Omega$  a un bord lipschitzien, alors  $\mathcal{L}$  est continue pour la norme  $L^\infty$ .*

**Preuve :** Pour l'existence de  $\mathcal{L}$ , on applique le théorème 1.3, et pour la positivité de  $\mathcal{L}$ , on applique le lemme 1.2 après avoir remarqué que, avec (1.21), on a

$$[\Omega \subset \Omega_\theta \text{ p.p.}] \Rightarrow [H_0^1(\Omega) \subset H_0^1(\Omega_\theta)] \Rightarrow [J(\Omega) \geq J(\Omega_\theta)].$$

Pour la remarque finale, on applique les propositions 1.8-1.7. □

**Remarque 1.13** Quand  $\Omega$  est assez régulier, on a

$$\mathcal{J}'_\Omega(0) \cdot \xi = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} |\nabla u_\Omega|^2 (\xi \cdot \nu_\Omega),$$

et alors la structure et le signe de la dérivée apparaissent de manière évidente. La proposition ci-dessus établit que cela reste vrai avec très peu de régularité sur  $\Omega$ , même si l'on ne peut pas écrire les formules ci-dessus, puisqu'elles demandent, en particulier, que la trace de  $\nabla u_\Omega$  soit définie sur

le bord. Si  $\Omega$  a un bord lipschitzien, la continuité  $L^\infty$  de  $\mathcal{L}$  fournit une sorte de borne  $L^1$  sur la trace de  $|\nabla u_\Omega|^2$ .

On peut noter la même propriété pour les fonctions valeurs propres du laplacien avec conditions de Dirichlet homogènes. Elles peuvent être définies pour tout  $\Omega$  mesurable, borné, satisfaisant (1.21). Si l'on note la  $k^e$  valeur propre  $\lambda_k(\Omega)$ , alors on a la propriété de monotonie suivante :  $[\Omega \subset \Omega_\theta] \Rightarrow [\lambda_k(\Omega) \geq \lambda_k(\Omega_\theta)]$ . Si elles sont valeurs propres simples, alors elles sont Fréchet-différentiables sur  $\Theta$  en  $\theta = 0$  sans hypothèse de régularité sur  $\Omega$ . La dérivée est donnée, dans le cas régulier, par

$$-(\lambda_k)'_\Omega(0) \cdot \xi = \int_{\partial\Omega} [\nabla u_k \cdot \nu_\Omega]^2 (\xi \cdot \nu_\Omega),$$

où  $u_k$  est la fonction propre associée (normalisée). Le signe de la dérivée est évident sur cette formule. En utilisant la propriété de monotonie de  $\lambda_k$  et les mêmes arguments que pour la proposition précédente, on montre que, même avec peu de régularité sur  $\Omega$ ,  $(\lambda_k)'_\Omega(0) \cdot \xi = -\mathcal{L}(\xi|_{\partial^*\Omega} \cdot \nu_\Omega)$  pour un certain  $\mathcal{L} \geq 0$ .

## 1.4 Résultats partiels sur la structure des dérivées secondes

Comme en optimisation classique, il peut s'avérer intéressant de travailler sur les dérivées secondes. On sait cependant que les dérivées secondes de forme sont, en général, difficiles à calculer. En particulier, il existe des propriétés de structure de ces dérivées, qui permettent de simplifier leur calcul ; voir par exemple [109] pour une démonstration des propriétés de structures des dérivées d'ordre 2 (ou plus), et l'article [28]. Pour des utilisations de ces dérivées, et une étude de la stabilité des points critiques, on réfère à [52], [45], [74], [75].

Dans ce paragraphe, on donne quelques résultats partiels sur la structure des dérivées de forme autour d'ensembles à périmètre fini. Un résultat de structure général est encore un problème ouvert, assez difficile car il semble déjà délicat de donner une formulation au résultat obtenu dans le cas régulier, ayant un sens pour des cas non réguliers (voir les formules redémontrées au paragraphe 1.4.2). On cite [96] et [97] pour le cas des domaines fissurés.

Avant de commencer, on donne notre définition de différentiabilité au sens des formes à l'ordre 2 : avec les notations introduites au paragraphe 1.1.2, on dit que  $J$  est deux fois dérivable autour de  $\Omega$  si  $\mathcal{J}_\Omega$  est différentiable (au sens de Fréchet) sur un voisinage de 0, et si  $\mathcal{J}'_\Omega : \Theta \rightarrow \Theta'$  est différentiable en 0. Dans ce cas, la dérivée seconde de forme est la forme bilinéaire symétrique  $\mathcal{J}''_\Omega(0) : \Theta \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$ .

### 1.4.1 Cas d'un point critique

On se place dans le cas où la dérivée première de forme est nulle. Bien sûr, cette hypothèse est très restrictive, mais en optimisation de forme, c'est souvent sous cette hypothèse qu'on est amené à utiliser la dérivée seconde ; en effet, si l'on minimise la fonction de forme  $J$  sans contrainte, et que l'on souhaite écrire les conditions d'optimalité autour d'une forme optimale, alors la dérivée première s'annule. Plus généralement, dans le cas d'une minimisation sous contrainte unidimensionnelle et différentiable :

$$\min_{V(\Omega)=V_0} J(\Omega)$$

avec  $J$  et  $V$  deux fois différentiables au sens des formes autour de  $\Omega$ , alors, par le théorème des multiplicateurs de Lagrange, il existe  $\lambda \in \mathbb{R}$  tel que la dérivée première du lagrangien  $\mathcal{J}_\Omega - \lambda \mathcal{V}_\Omega$  s'annule. Le résultat qui suit permet alors de donner un résultat de structure sur la dérivée seconde de ce lagrangien.

**Théorème 1.5** *Soit  $\Omega$  à périmètre fini,  $\Gamma = \partial^*\Omega$ , et  $\mathcal{J}_\Omega$  une fonction de forme satisfaisant (1.3) et deux fois différentiable en 0, avec  $\mathcal{J}'_\Omega(0) \equiv 0$ .*

Alors il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{L}_2 : \Phi(\Theta) \times \Phi(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$  continue pour la topologie de  $\Phi(\Theta)$  introduite par le théorème 1.3, et telle que

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) = \mathcal{L}_2(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \eta|_\Gamma \cdot \nu_\Omega).$$

**Preuve :** Soit  $\xi$  et  $\eta$  deux champs de  $\Theta$ , et notons  $\gamma$  et  $\delta$  leurs flots respectifs.

Si  $\xi \cdot \nu_\Omega = 0$  ( $\mathcal{H}^{d-1} - p.p.$ ), alors on a vu que  $\gamma_t(\Omega) = \Omega$  *p.p.*,  $\forall t$ , et donc en utilisant (1.3), on sait que  $J(\delta_s \circ \gamma_t(\Omega)) = \mathcal{J}_\Omega(\delta_s \circ \gamma_t - Id)$  ne dépend pas de  $t$ ; en dérivant successivement par rapport à  $t$  et  $s$  en  $(0, 0)$ , on obtient :

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) + \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\eta \cdot \xi) = 0, \quad \forall \eta \in \Theta, \quad \forall \xi \in K,$$

où  $K = \Phi^{-1}(0) = \{\xi \in \Theta, \xi \cdot \nu_\Omega = 0 \text{ } \mathcal{H}^{d-1} - p.p. \text{ sur } \Gamma\}$ .

Utilisant maintenant que  $\mathcal{J}_\Omega'(0) = 0$ , on en déduit que

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) = 0, \quad \forall \eta \in \Theta, \quad \forall \xi \in K.$$

Ceci permet de passer au quotient par  $K \times K$  : en effet, si  $\xi_1, \eta_1 \in \Theta, \xi_2, \eta_2 \in K$ ,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_1 + \xi_2, \eta_1 + \eta_2) &= \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_1, \eta_1) + \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_1, \eta_2) + \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_2, \eta_1) + \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_2, \eta_2) \\ &= \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi_1, \eta_1) \end{aligned}$$

Ainsi, on obtient le diagramme de passage au quotient suivant :

$$\begin{array}{ccc} \Theta \times \Theta & \xrightarrow{\mathcal{J}_\Omega''(0)} & \mathbb{R} \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow \tilde{\mathcal{L}}_2 & \\ \frac{\Theta \times \Theta}{K \times K} & & \end{array}$$

où  $\pi_2$  est la projection canonique sur l'espace quotient. De plus,  $\tilde{\mathcal{L}}_2$  est continue, par définitions de la topologie quotient sur  $\frac{\Theta \times \Theta}{K \times K}$ . Ensuite, on sait que l'on a un isomorphisme continu d'espace normé entre  $\frac{\Theta \times \Theta}{K \times K}$  et  $(\Theta/K)^2$ , et on rappelle que  $\Theta/K$  est isométrique à  $\Phi(\Theta)$  (par définition de la topologie choisie sur  $\Phi(\Theta)$ , voir (1.5)). Ainsi, on a le diagramme

$$\begin{array}{ccc} \Theta \times \Theta & \xrightarrow{\mathcal{J}_\Omega''(0)} & \mathbb{R} \\ \pi_2 \downarrow & \nearrow \tilde{\mathcal{L}}_2 & \\ \frac{\Theta \times \Theta}{K \times K} & & \\ \Phi \times \Phi \downarrow \sim & \nearrow \mathcal{L}_2 & \\ \Phi(\Theta) \times \Phi(\Theta) & & \end{array}$$

où

$$\Phi \times \Phi : (\xi, \eta) \in \Theta \times \Theta \mapsto (\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \eta|_\Gamma \cdot \nu_\Omega) \in (L^\infty(\Gamma, \mathcal{H}^{d-1}))^2,$$

ce qui nous donne la forme bilinéaire continue  $\mathcal{L}_2$  telle que  $\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) = \mathcal{L}_2(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \eta|_\Gamma \cdot \nu_\Omega)$ .  $\square$

### 1.4.2 Cas régulier

On montre ici que l'on peut pousser les calculs du paragraphe précédent et retrouver le résultat de structure des dérivées secondes dans le cas régulier, sans faire appel à l'approche utilisée dans [109] (voir aussi [51]).

**Théorème 1.6** Soit  $\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^2$ ,  $\Gamma = \partial\Omega$ , et  $\mathcal{J}_\Omega$  une fonction de forme deux fois différentiable en 0. Alors il existe une forme bilinéaire  $\mathcal{L}_2 : \mathcal{C}^1(\Gamma) \times \mathcal{C}^1(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R}$  continue, telle que

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) = \mathcal{L}_2(\xi|_\Gamma \cdot \nu_\Omega, \eta|_\Gamma \cdot \nu_\Omega) - \mathcal{L}_1\left(\langle D_\tau \nu_\Omega \xi_\tau, \eta_\tau \rangle + \langle D_\tau \eta \xi_\tau + D_\tau \xi \eta_\tau, \nu_\Omega \rangle\right),$$

où  $\mathcal{L}_1 \in \mathcal{C}^1(\Gamma)'$  vient de la structure de  $\mathcal{J}_\Omega'(0)$ ,  $\xi_\tau, \eta_\tau$  désignent les composantes tangentielles de  $\xi, \eta$ , et  $D_\tau \nu_\Omega$  est la différentielle tangentielle de  $\nu_\Omega$ .

**Preuve :** Soit  $\xi$  et  $\eta$  deux champs,  $\gamma, \delta$  leurs flots respectifs. On pose  $\nu = \nu_\Omega$ .

Comme dans la preuve du théorème 1.5, on a

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) + \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\xi \eta) = 0, \quad \forall \xi \in \Theta, \quad \forall \eta \in K,$$

où  $K := \{\eta / \eta \cdot \nu = 0\}$ . On pose  $b : \Theta \times \Theta \rightarrow \mathbb{R}$  cette application bilinéaire qui, pour  $\xi$  fixé, passe au quotient par  $K$ .

Par suite  $b(\xi, \eta) = \tilde{b}(\xi, \eta|_\Gamma \cdot \nu)$  où  $\tilde{b} : \Theta \times \Phi(\Theta) \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\Phi(\Theta) = \{\varphi = \xi \cdot \nu, \xi \in \Theta\} (= \mathcal{C}^1(\partial\Omega))$  si  $\Omega$  est  $\mathcal{C}^2$ .

On obtient, par définition du quotient, la continuité de  $\tilde{b}(\xi, \cdot)$  à  $\xi$  fixé. Ainsi la forme bilinéaire  $\tilde{b}$  est séparément continue, donc continue, par le théorème de Banach-Steinhaus. De plus,

$$\mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) + \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\xi \eta) = \tilde{b}(\xi, \eta|_\Gamma \cdot \nu), \quad \forall \xi, \eta \in \Theta.$$

Par symétrie de  $\mathcal{J}_\Omega''(0)$ , on peut écrire

$$\tilde{b}(\eta, \xi|_\Gamma \cdot \nu) - \tilde{b}(\xi, \eta|_\Gamma \cdot \nu) = \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\eta \xi - D\xi \eta)$$

Maintenant, on veut appliquer cette dernière égalité à  $\eta_\nu$ , la composante normale de  $\eta$ . Pour cela, on doit choisir un opérateur de prolongement de  $\partial\Omega$  à un voisinage tubulaire de  $\partial\Omega$ , ce qui nécessite de la régularité. Une fonction  $\varphi$  étant donnée sur  $\partial\Omega$ , on pose par exemple  $\tilde{\varphi}(x) = \varphi(P_{\partial\Omega}x)$  où  $P_{\partial\Omega}$  est la projection sur  $\partial\Omega$ , bien définie et régulière ( $\mathcal{C}^1$ ) sur un voisinage (voir [51]). Autrement dit, la fonction  $\varphi$  est prolongée de façon à être constante dans la direction normale (on a un système de coordonnées locales dont  $\nu$  est une direction de coordonnée). De plus, cet opérateur de prolongement est continu sur  $\Theta$ .

On peut maintenant définir  $\eta_\nu := \widetilde{(\eta \cdot \nu)}\nu$ .

En posant  $\mathcal{L}_0(\varphi_1, \varphi_2) = \tilde{b}(\widetilde{\varphi_1\nu}, \varphi_2)$  forme bilinéaire continue sur  $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)^2$  (non symétrique), on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) &= \tilde{b}(\xi, \eta \cdot \nu) - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\xi \eta) \\ &= \tilde{b}(\eta_\nu, \xi \cdot \nu) - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\eta_\nu \xi - D\xi \eta_\nu) - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\xi \eta) \\ &= \mathcal{L}_0(\eta \cdot \nu, \xi \cdot \nu) - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\eta_\nu \xi - D\xi \eta_\nu + D\xi \eta) \\ &= \mathcal{L}_0(\eta \cdot \nu, \xi \cdot \nu) - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D\eta_\nu \xi + D\xi \eta_\tau) \end{aligned}$$

où  $\eta_\tau = \eta - \eta_\nu$ . On utilise maintenant que  $D\eta_\nu = D_\tau \eta_\nu$ , car par le choix de l'opérateur de prolongement,  $\eta_\nu$  est constant dans la direction  $\nu$  (par définition,  $D_\tau a = Da - (Da \cdot \nu)\nu$ ), et par suite  $D\eta_\nu \xi = D_\tau \eta_\nu \xi_\tau$ . De plus,  $D\xi \eta_\tau = D_\tau \xi \eta_\tau$ .

On peut symétriser le membre de droite de l'équation ci-dessus, et on obtient

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_\Omega''(0) \cdot (\xi, \eta) &= \frac{1}{2} \left[ \mathcal{L}_0(\eta \cdot \nu, \xi \cdot \nu) + \mathcal{L}_0(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) \right. \\ &\quad \left. - \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot (D_\tau \eta_\nu \xi_\tau + D_\tau \xi \eta_\tau + D_\tau \xi_\nu \eta_\tau + D_\tau \eta \xi_\tau) \right] \\ &= \mathcal{L}_2(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) - \frac{1}{2} \mathcal{J}_\Omega'(0) \cdot \left( 2D_\tau \eta \xi_\tau + 2D_\tau \xi \eta_\tau - D_\tau \xi_\tau \eta_\tau - D_\tau \eta_\tau \xi_\tau \right) \end{aligned}$$

où  $\mathcal{L}_2(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) = \frac{1}{2}(\mathcal{L}_0(\eta \cdot \nu, \xi \cdot \nu) + \mathcal{L}_0(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu))$  est une forme bilinéaire symétrique, continue sur  $\mathcal{C}^1(\partial\Omega)^2$ .

On applique maintenant le théorème de structure des dérivées premières de forme, affirmant que la dérivée ne dépend que de la composante normale de la déformation : ainsi, avec la formule

$${}^t D_\tau \xi_\tau \nu + {}^t D_\tau \nu \xi_\tau = 0$$

qui s'obtient en dérivant tangentiellement  $\xi_\tau \cdot \nu = 0$ , on obtient finalement

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}''(0).(\xi, \eta) &= \mathcal{L}_2(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \left( \langle 2D_\tau \eta \xi_\tau + 2D_\tau \xi \eta_\tau, \nu \rangle - \langle \eta_\tau, {}^t D_\tau \xi_\tau \nu \rangle - \langle \xi_\tau, {}^t D_\tau \eta_\tau \nu \rangle \right) \\
&= \mathcal{L}_2(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) \\
&\quad - \frac{1}{2} \mathcal{L}_1 \left( \langle 2D_\tau \eta \xi_\tau + 2D_\tau \xi \eta_\tau, \nu \rangle + \langle \eta_\tau, {}^t D_\tau \nu \xi_\tau \rangle + \langle \xi_\tau, {}^t D_\tau \nu \eta_\tau \rangle \right) \\
&= \mathcal{L}_2(\xi \cdot \nu, \eta \cdot \nu) - \mathcal{L}_1 \left( \langle D_\tau \eta \xi_\tau + D_\tau \xi \eta_\tau, \nu \rangle + \langle D_\tau \nu \xi_\tau, \eta_\tau \rangle \right)
\end{aligned}$$

ce qui conclut la démonstration (a priori,  $\mathcal{L}_0$  dépend du prolongement choisi, mais comme dans la formule finale, le prolongement n'apparaît que dans  $\mathcal{L}_2$ , cette dernière ne dépend pas, en fait, du prolongement choisi).  $\square$

## 1.5 Quelques résultats de régularité

Dans ce paragraphe, on montre comment les calculs de dérivées de forme peuvent, via l'utilisation de leur structure, fournir des informations sur la régularité des formes optimales.

On insiste sur le fait que ces résultats restent partiels, et en particulier, on ne prétend pas démontrer des résultats difficiles de régularité, comme par exemple le problème de régularité pour le problème isopérimétrique (voir [62] pour un rappel des résultats et des références et voir remarque 1.16).

### 1.5.1 Le problème de Cheeger

On s'intéresse d'abord au problème géométrique suivant :

$$\min_{\Omega \subset D} \frac{P(\Omega)}{|\Omega|}, \quad (1.22)$$

où  $D$  est une "boîte", c'est-à-dire un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ .

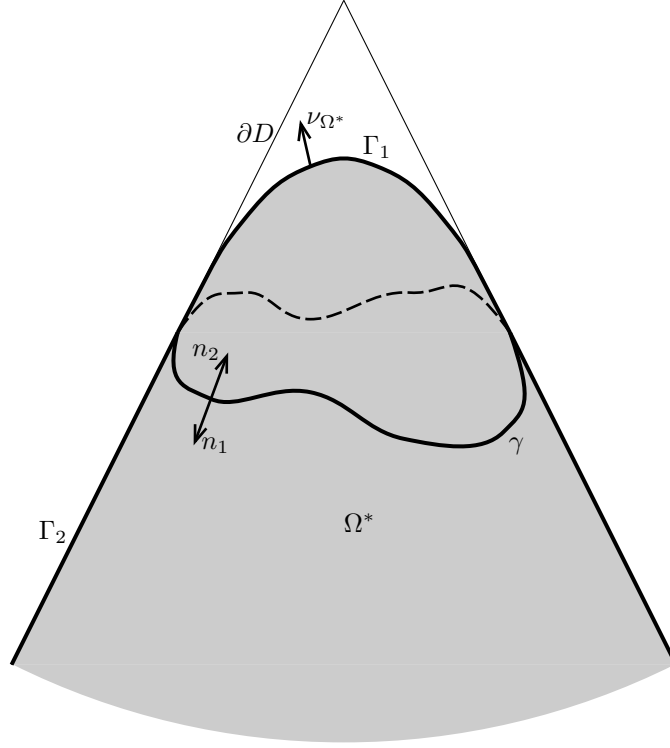
Ce problème a été introduit par Cheeger dans [37] (pour des variétés sans bord ou avec bord : ici, on ne traite que ce dernier cas). Il est classique de voir, en utilisant le théorème de compacité 1.1 qu'il existe une forme optimale  $\Omega^*$  solution de (1.22), et on voit facilement que cette solution touche le bord de  $D$  (sinon on peut diminuer le quotient  $P(\Omega^*)/|\Omega^*|$  par une dilatation de facteur plus grand que 1, dilatation qui reste dans la boîte pour un facteur proche de 1). On pose alors  $h(D)$  la valeur du minimum, et on l'appelle *constante de Cheeger* de  $D$ .

**Remarque 1.14** Ce problème géométrique est lié à la première valeur propre du laplacien avec condition de Dirichlet, notée  $\lambda_1$  : Cheeger montre dans [37] l'inégalité  $\lambda_1(D) \geq \left(\frac{h(D)}{2}\right)^2$ . On peut étendre ce type d'inégalité à la première valeur propre du  $p$ -laplacien  $\mu_p(D)$  sur un domaine  $D$  (avec ces notations,  $\lambda_1 = \mu_2$ ), et lorsque  $p \rightarrow 1$  on sait même que  $\mu_p(D) \rightarrow_{p \rightarrow 1} h(D)$  et que la fonction propre associée  $u_p$  converge vers la fonction caractéristique de  $\Omega^*$  solution de (1.22) (voir [81] pour plus de détails). Ils en déduisent la propriété que  $\Omega^*$  est convexe si  $D$  l'est.

**Proposition 1.12** *Soit  $\Omega^*$  solution de (1.22). On suppose que  $\Gamma_1 = \partial\Omega^* \cap D$  et  $\Gamma_2 = \partial\Omega^* \cap \partial D$  sont des hypersurfaces régulières ( $\mathcal{C}^{1,1}$ ). On suppose enfin que l'interface de contact  $\gamma = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$  est régulière ( $\mathcal{C}^1$ ).*

*Alors  $\Omega^*$  est  $\mathcal{C}^1$ , i.e.  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se rencontrent tangentiellement.*

**Remarque 1.15** Ce résultat peut être trouvé dans [62]. De plus, on peut trouver dans [126] un résultat plus fin, à savoir la régularité  $\mathcal{C}^{1,1}$ . Ici, nous montrons comment les dérivées de formes permettent de retrouver cette propriété de contact tangentiel. Nous généraliserons cette approche à d'autres fonctionnelles au paragraphe suivant.


 FIG. 1.3 – Intersection entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ 

**Remarque 1.16** L’hypothèse de régularité de  $\Gamma_2$  est dépendante de la boîte  $D$ , et elle est satisfaite dès que  $D$  est régulière (mais cela n’est pas nécessaire, on imagine que  $\Omega^*$  va “fuir” les parties irrégulières de  $D$ ; imaginer le cas d’un carré). L’hypothèse de régularité de  $\Gamma_1$  est évidemment très forte. Il est connu (et difficile) que  $\Gamma_1$  est analytique si la dimension  $d$  est inférieure ou égale à 7, et on sait qu’il peut apparaître des singularités à partir de la dimension 8 : l’ensemble des singularités  $\Sigma_{sing}$  satisfait alors  $\mathcal{H}^s(\Sigma_{sing}) = 0$ ,  $\forall s > d - 8$ . Par contre, on n’a pas vraiment besoin de la régularité de l’interface de contact  $\gamma$  dans l’énoncé de la proposition 1.12. En effet, les calculs que nous effectuons dans la démonstration qui suit peuvent être généralisés au cas où  $\gamma$  est un ensemble à périmètre fini dans la variété  $\partial D$  (au sens des ensembles à périmètre fini dans une variété).

**Preuve :** On se base sur la formule suivante, qui généralise la formule d’intégration par parties, sur une variété (on peut trouver une preuve dans [126]) : si  $M$  est une hyper-surface  $\mathcal{C}^{1,1}$  orientée, à bord  $\partial M$  de régularité  $\mathcal{C}^1$ , alors

$$\forall \xi \in \Theta, \int_M \nabla_M \cdot \xi d\mathcal{H}^{d-1} = \int_M H_M \xi \cdot \nu_M d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\partial M} \xi \cdot n_{\partial M} d\mathcal{H}^{d-2} \quad (1.23)$$

où  $H_M$  est la courbure de  $M$ , et  $n_{\partial M}$  le vecteur normal à  $\partial M$ , orienté vers l’extérieur.

On observe tout d’abord que si  $\Omega^*$  est solution de (1.22), alors  $\Omega^*$  est aussi solution du problème de minimisation pénalisé suivant :

$$\min_{\Omega \subset D} P(\Omega) - \lambda |\Omega|,$$

où  $\lambda = h(D)$ . Ainsi la condition d’optimalité sur  $\Omega^*$  s’écrit :

$$\mathcal{P}'_{\Omega^*}(0) \cdot \xi - \lambda \mathcal{V}'_{\Omega^*}(0) \cdot \xi \geq 0, \forall \xi \text{ tel que } \xi \cdot \nu_D \leq 0$$

avec les notations introduites au paragraphe 1.1.3. En particulier, on a

$$\mathcal{P}'_{\Omega^*}(0) - \lambda \mathcal{V}'_{\Omega^*}(0) = 0 \text{ sur } \Theta_D := \{\theta \in \Theta \text{ tels que } \theta \cdot \nu_D = 0\}$$

Avec la représentation du théorème de structure, cela implique

$$\mathcal{L}_P = \lambda \mathcal{L}_V \text{ sur } \Phi(\Theta_D).$$



On a déjà vu que  $\mathcal{L}_V \equiv 1$  via l'injection  $L_{loc}^1(\partial\Omega, d\mathcal{H}^{d-1})$  dans  $(\Phi(\Theta))'$ .

Pour  $\mathcal{L}_P$ , on gère la non-régularité de  $\partial\Omega^*$  à l'aide de la proposition 1.3 et de la formule (1.23), appliquée à la fois à  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$ , et on obtient

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_P(\xi \cdot \nu_{\Omega^*}) &= \int_{\Gamma} \nabla_{\Gamma} \cdot \xi d\mathcal{H}^{d-1} = \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma} \cdot \xi d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\Gamma_2} \nabla_{\Gamma} \cdot \xi d\mathcal{H}^{d-1} \\ &= \int_{\Gamma_1} H_{\Gamma_1} \xi \cdot \nu_{\Omega^*} d\mathcal{H}^{d-1} + \int_{\gamma} \xi \cdot (n_1 + n_2) d\mathcal{H}^{d-2} + \int_{\Gamma_2} H_D \xi \cdot \nu_D d\mathcal{H}^{d-1},\end{aligned}$$

où  $n_1$  (resp.  $n_2$ ) est la normale à  $\gamma$  dans l'hyperplan tangent à  $\Gamma_1$  (resp.  $\Gamma_2$ ).

En d'autres termes, on a l'égalité des mesures :

$$H_{\Gamma_1} \nu_{\Omega^*} d\mathcal{H}_{|\Gamma_1}^{d-1} + (n_1 + n_2) d\mathcal{H}_{|\gamma}^{d-2} + H_D \nu_D d\mathcal{H}_{|\Gamma_2}^{d-1} = \lambda \nu_{\Omega^*} d\mathcal{H}_{|\partial\Omega^*}^{d-1} \text{ sur } \Theta_D.$$

En testant cette égalité avec  $\theta_\varepsilon := \widetilde{n}_2 \rho_\varepsilon$  où  $\rho_\varepsilon$  est une fonction de localisation au voisinage  $\mathcal{V}(\gamma)$  de  $\gamma$ , et  $\widetilde{n}_2$  est un prolongement à  $\mathbb{R}^d$  de  $n_2$  qui satisfait  $\widetilde{n}_2 \cdot \nu_D = 0$  sur  $\partial D \cap \mathcal{V}(\gamma)$ , on obtient  $n_1 \cdot n_2 = -1$ , c'est-à-dire  $n_1$  et  $n_2$  colinéaires et de sens opposés.

Cela signifie que  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  se rencontrent tangentiellement sur  $\gamma$ , donc que  $\Omega^*$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .  $\square$

**Remarque 1.17** Notre résultat n'est pas spécifique au problème de Cheeger. On peut l'adapter au problème plus classique de la minimisation du périmètre sous contrainte d'inclusion dans  $D$  et avec contrainte de volume :

$$\min_{\Omega \subset D, |\Omega| = V_0} P(\Omega).$$

Le résultat de régularité  $\mathcal{C}^{1,1}$  obtenu dans [126] est d'ailleurs démontré pour ce problème (plus général, puisque toute solution  $\Omega^*$  du problème de Cheeger (1.22) est solution du problème isopérimétrique pour la constante  $V_0 = |\Omega^*|$ ). Néanmoins, le problème de savoir si les solutions sont convexes pour des boîtes  $D$  convexes, semble encore ouvert (voir [126] pour des conditions suffisantes).

La régularité des formes optimales pour des fonctions de type énergie de Dirichlet ou valeur propre, est différente : on obtient dans ce travail la régularité  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ , et ce résultat est optimal (voir chapitres 3 et 4).

### 1.5.2 Forme d'une goutte en électromouillage

Dans ce paragraphe, nous décrivons brièvement un problème relié au travail effectué dans la thèse de C. Scheid [116] (voir aussi [117]). Elle y étudie la forme d'une goutte d'eau soumise au poids et à un champ électrique ; on appelle cette expérience *électromouillage*. L'une des questions centrales qui y est étudiée, concerne l'angle de contact entre la goutte et le sol. Il est montré (d'abord avec une hypothèse d'axisymétrie qui ramène le problème à un cas 2D, et ensuite plus généralement pour une géométrie 3D non nécessairement symétrique) que cet angle de contact ne dépend pas du potentiel électrostatique appliqué, pour le modèle considéré.

Nous retrouvons ici une partie des résultats obtenus dans [116], avec une application directe de nos calculs de dérivées de forme autour d'ensembles irréguliers. Pour ne pas alourdir la présentation et se concentrer sur l'utilisation des dérivées de forme, nous allons traiter un cas simplifié, avec les fonctions d'énergie (plus académiques) que nous manipulons dans notre travail. Mais l'approche peut se généraliser facilement ; de plus, notre résultat sera valable en toute dimension, ce qui généralise les cas traités dans [116].

On s'intéresse donc au problème suivant :

$$\min_{\Omega \subset D} E(\Omega) := J(\Omega) + \mu_1 \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap D) + \mu_2 \mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap \partial D) - \lambda(|\Omega| - V_0), \quad (1.24)$$

où  $J(\Omega)$  est l'énergie de Dirichlet introduite au paragraphe 1.1.3, pour un second membre  $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$  choisi,  $D$  est une boîte régulière, et  $\mu_1, \mu_2, \lambda, V_0$  sont des constantes réelles.

**Remarque 1.18** Pour avoir un problème bien posé, il aurait été plus naturel de remplacer les termes de capillarité par les définitions obtenues par la théorie géométrique de la mesure, en introduisant par exemple, le périmètre relatif à la place du terme  $\mathcal{H}^{d-1}(\partial\Omega \cap D)$  (voir par exemple [53] pour une définition du périmètre relatif). Mais nous ne nous intéressons pas ici au problème de l'existence (qui semble aussi être ouvert dans [116]), et nous n'allons considérer, comme dans [116], que des solutions régulières par morceaux, pour lesquelles les différentes définitions du périmètre relatif sont égales.

**Proposition 1.13** Soit  $\Omega^*$  solution de (1.24), avec  $f \in H^1(\mathbb{R}^d)$ . On suppose que  $\Gamma_1 = \partial\Omega^* \cap D$  et  $\Gamma_2 = \partial\Omega^* \cap \partial D$  sont des hypersurfaces régulières ( $\mathcal{C}^2$  jusqu'au bord), que  $\gamma = \overline{\Gamma_1} \cap \overline{\Gamma_2}$  est régulière ( $\mathcal{C}^2$ ), et enfin que le contact entre les interfaces n'est nulle part tangentiel sur  $\gamma$ .

Alors l'angle de contact  $\alpha$  entre  $\Gamma_1$  et  $\Gamma_2$  satisfait  $\mu_1 \cos(\alpha) + \mu_2 = 0$ .

En particulier, cet angle est constant sur  $\gamma$  et ne dépend pas de  $f$ , donc est égal à celui du cas géométrique où  $J \equiv 0$  (i.e.  $f = 0$ ).

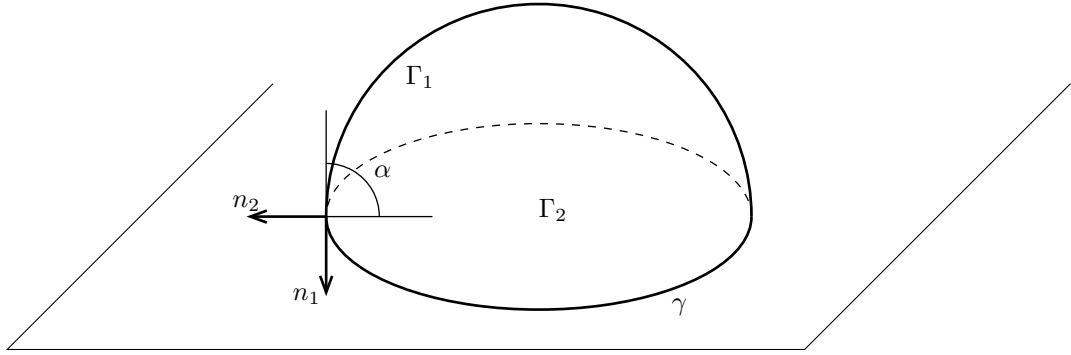


FIG. 1.4 – Forme d'une goutte en électromouillage

**Remarque 1.19** Comme pour le paragraphe précédent, où la régularité de la frontière libre  $\Gamma_1$  est un problème très délicat, il existe des résultats qui justifient en partie (car ils ne sont pas valables jusqu'au bord de la boîte) les hypothèses de régularité. On peut citer, pour des problèmes mélangeant énergie de Dirichlet et fonction périmètre, le travail de thèse de N. Landais ([92], voir aussi [93]). Le résultat principal de ce travail explique que la régularité obtenue est la même que pour le problème isopérimétrique, car des estimations fines sur l'énergie de Dirichlet permettent de démontrer que les solutions sont des quasi-minimiseurs pour le périmètre (voir [10] pour des résultats et des références sur ce sujet).

**Remarque 1.20** Le cas particulier  $f = 0, \mu_1 = 1, \mu_2 = 0$  est bien connu. Il se reformule de la manière suivante (si l'on considère une version avec contrainte de volume plutôt qu'avec une pénalisation) :

$$\min_{\Omega \subset D, |\Omega| = V_0} P_D(\Omega).$$

On retrouve le résultat déjà connu, que la forme optimale touche la boîte orthogonalement.

Le cas  $\mu_1 = \mu_2 = 1, f = 0$  est le problème isopérimétrique classique : on retrouve la régularité  $\mathcal{C}^1$  évoquée au paragraphe précédent, puisque l'angle est alors égal à  $\pi$ .

**Preuve :** Dans cette démonstration, on change l'espace des déformations, d'une part parce que les fonctionnelles considérées ne sont pas différentiables dans  $\Theta$ , et d'autre part pour gérer la contrainte d'inclusion dans  $D$ . Ainsi on introduit le nouvel espace de déformation

$$\Theta_D = \{\theta \in D \text{ tels que } \theta \cdot \nu_D = 0\},$$

sous-espace fermé de  $\Theta$ . Si  $\Omega^*$  est solution de (1.24), on écrit la condition d'optimalité d'ordre 1 :

$$\mathcal{J}'_{\Omega^*}(0) \cdot \xi + \mu_1 \mathcal{P}'_1(0) \cdot \xi + \mu_2 \mathcal{P}'_2(0) \cdot \xi = \lambda \mathcal{V}'_{\Omega^*}(0) \cdot \xi, \quad \forall \xi \in \Theta_D,$$

où  $\mathcal{P}'_1(0) \cdot \xi = \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} \cdot \xi$  est la différentielle dans  $\Theta_D$  de  $\mathcal{H}^{d-1}(\Gamma_1)$  (de même pour  $\mathcal{P}'_2(0)$ ).

Ainsi, on obtient, d'après les calculs rappelés au paragraphe 1.1.3,

$$- \int_{\partial\Omega^*} |\nabla u_{\Omega^*}|^2 \xi \cdot \nu_{\Omega^*} + \mu_1 \int_{\Gamma_1} \nabla_{\Gamma_1} \cdot \xi + \mu_2 \int_{\Gamma_2} \nabla_{\Gamma_2} \cdot \xi = \lambda \int_{\Omega^*} \nabla \cdot \xi, \quad \forall \xi \in \Theta_D,$$

car dans les hypothèses géométriques dans lesquelles on se place,  $u_{\Omega^*} \in H^2(\Omega^*)$ , puisque l'angle de contact  $\alpha$  (qui dépend pour l'instant de la position sur  $\gamma$ ) est dans  $]0, \pi]$  (voir [46] et [64], et la remarque 1.22).

Avec la formule (1.23), on obtient donc :

$$\begin{aligned} -|\nabla u_{\Omega^*}|^2 \nu_{\Omega^*} d\mathcal{H}_{|\partial\Omega^*}^{d-1} + \mu_1 H_{\Gamma_1} \nu_{\Omega^*} d\mathcal{H}_{|\Gamma_1}^{d-1} + \mu_2 H_D \nu_D d\mathcal{H}_{|\Gamma_2}^{d-1} \\ + (\mu_1 n_1 + \mu_2 n_2) d\mathcal{H}_{|\gamma}^{d-2} = \lambda d\mathcal{H}_{|\partial\Omega^*}^{d-1} \text{ sur } \Theta_D \end{aligned}$$

Comme pour la preuve de la proposition 1.12, on obtient le résultat attendu  $\mu_1 n_1 \cdot n_2 + \mu_2 = 0$ .

□

**Remarque 1.21** Au vu de la preuve qui précède, le résultat de la proposition 1.13 reste valable pour toute fonction d'énergie  $J$  différentiable et telle que  $\mathcal{J}'_\Omega(0)$  soit une mesure absolument continue par rapport à  $\mathcal{H}^{d-1}$ , pour un domaine  $\Omega$  régulier par morceaux. En particulier, c'est le cas de la fonction  $\lambda_1$ .

**Remarque 1.22** Dans [116], l'énergie  $J$  est composée d'un terme d'énergie potentielle (du type  $\int_\Omega x_3 dx$ , dans  $\mathbb{R}^3$ ), et d'un terme d'énergie électrostatique, qui est dans  $H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$ . La preuve qui précède peut vraisemblablement s'adapter au cas d'une fonction d'état dans cet espace, car alors la formule

$$- \int_{\partial\Omega^*} |\nabla u_{\Omega^*}|^2 \xi \cdot \nu_{\Omega^*}$$

a un sens. Pour le problème de Dirichlet, la régularité  $H^{\frac{3}{2}+\varepsilon}$  est valable pour tout domaine polyédral lipschitzien (voir [46], et les remarques faites dans [40]), ce qui permet de traiter le cas d'angles supérieurs à  $\pi$  (mais différent de  $2\pi$ ).

On peut sans doute aussi se passer de l'hypothèse de contact non-tangentiel. Pour le cas d'un angle de contact nul, il faut travailler plus, mais la régularité attendue semble encore valable (voir [65], [47]).

## Chapitre 2

# Optimisation de forme sous contrainte de convexité

Ce chapitre est la reproduction de l'article *Polygons as optimal shapes with convexity constraint* en coécriture avec Arian Novruzi<sup>1</sup>, soumis pour publication.

### Abstract

In this paper, we focus on the following general shape optimization problem :

$$\min\{J(\Omega), \Omega \text{ convex}, \Omega \in \mathcal{S}_{ad}\},$$

where  $\mathcal{S}_{ad}$  is a set of 2-dimensional admissible shapes and  $J : \mathcal{S}_{ad} \rightarrow \mathbb{R}$  is a shape functional. Using a specific parameterization of the set of convex domains, we derive some extremality conditions (first and second order) for this kind of problem. Moreover, we use these optimality conditions to prove that, for a large class of functionals (satisfying a concavity like property), any solution to this shape optimization problem is a polygon.

*Keywords* : Shape optimization, convexity constraint, optimality conditions.

## 2.1 Introduction

In this paper, we are mainly interested in questions related to a convexity constraint in shape optimization. We deal with the following general shape optimization problem :

$$\min\{J(\Omega), \Omega \text{ convex}, \Omega \in \mathcal{S}_{ad}\}, \quad (2.1)$$

where  $J$  is a shape functional defined on a class  $\mathcal{S}_{ad}$  of subsets of  $\mathbb{R}^2$ .

Our goal is, on one hand, to write down explicit first and second order optimality conditions for general 2-dimensional shape optimization problems with convexity constraint and, on the other hand, to use them to exhibit a family of shape functionals for which optimal shapes are polygons.

As it is well-known, dimension 2 allows to write the convexity constraint through the positivity of a **linear** operator with respect to the shape. More precisely, if one uses polar coordinates representation  $(r, \theta)$  for the domains, namely

$$\Omega_u := \left\{ (r, \theta) \in [0, \infty) \times \mathbb{R} ; r < \frac{1}{u(\theta)} \right\}, \quad (2.2)$$

where  $u$  is a positive and  $2\pi$ -periodic function, then

$$\Omega_u \text{ is convex} \iff u'' + u \geq 0.$$

---

<sup>1</sup>University of Ottawa, Department of Mathematics and Statistics, 585 King Edward, Ottawa, ON, K1N 6N5, Canada

As a consequence, we look at shape optimization problems of the form

$$u_0 \in \mathcal{F}_{ad}, j(u_0) = \min\{j(u) := J(\Omega_u), u > 0, u'' + u \geq 0, u \in \mathcal{F}_{ad}\} \quad (2.3)$$

where  $\mathcal{F}_{ad}$  is a set of convenient  $2\pi$ -periodic admissible functions.

A first contribution is to write down explicitly the first and second order optimality conditions on  $u_0$  for some specific choices of  $\mathcal{F}_{ad}$ . Then, we use these conditions to address the following question : let us consider the functional

$$J(\Omega_u) = j(u) = \int_0^{2\pi} G(\theta, u(\theta), u'(\theta)) d\theta$$

where  $G : \mathbb{R} \times (0, +\infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  is  $\mathcal{C}^2$ ,  $2\pi$ -periodic in the first variable, and  $j$  is defined on some set of functions  $\mathcal{F}_{ad}$  as above. Then, is it possible to write down sufficient conditions on  $G$  so that any optimal shape of (2.3) be a polygon ?

This question is motivated by two preliminary results in this direction arising from two quite different fields :

- first a result by M. Crouzeix in [42], motivated by abstract operator theory : a problem of the form (2.3) is considered where  $G(\theta, u, u') = h(u'/u)$  with  $h$  strictly concave and even, and  $\mathcal{F}_{ad} = \{u \text{ regular enough} ; 0 < a \leq u \leq b\}$ . All optimal shapes are shown to be polygons,
- then a result by T. Lachand-Robert and M.A. Peletier for a shape optimization arising in the modeling of the movement of a body inside a fluid (Newton's problem, see [88] and references therein). Here  $G(\theta, u, u') = h_1(u) - u'^2 h_2(u)$  and  $\mathcal{F}_{ad} = \{u \text{ regular enough} ; 0 < a \leq u \leq b\}$ . Again, with convenient assumptions on  $h_1$  and  $h_2$ , they prove that optimal shapes are polygons.

We also refer to T. Bayen [14] for results about minimizing functionals of type  $j$  with similar constraints, seen as controls.

Our goal here is to generalize these two results and to find rather general sufficient conditions on  $G$  which will imply that optimal shapes are necessarily polygons. We state three results in this direction in the next section. It turns out that a main step in the proof is based on the use of the second order optimality conditions with convexity constraint. This is the main reason why we write down explicitly these conditions, which are actually interesting for themselves and which may also be useful in some other problems (see [72] for the use of the first order optimality condition on a particular problem of optimal eigenvalue with convexity constraint). They imply that optimal shapes are necessarily polygons inside the constraints (see Theorem 2.2.1). Next, to deal with the solution on the constraint, additional assumptions are needed on the boundary of the constraints (see Theorems 2.2.2 and 2.2.3). The sufficient conditions that we obtain on  $G$ , are rather sharp as shown through several examples and counterexamples.

We state sufficient conditions on  $G$  for solutions to be polygons in the following section. Then, Section 2.3 is devoted to the “abstract” first and second order optimality conditions for convexity constraint. Proofs of the results in Section 2.2 are given in Section 4. Finally, we give examples and counterexamples in Section 2.5 which show how sharp our Section 2.2 results are.

## 2.2 Main results

**Notation :**  $\mathbb{T} := [0, 2\pi)$ . Throughout the paper, any function defined on  $\mathbb{T}$  is considered as the restriction to  $\mathbb{T}$  of a  $2\pi$ -periodic function on  $\mathbb{R}$ , with the same regularity. Let  $W^{1,\infty}(\mathbb{T}) := \{u \in W_{loc}^{1,\infty}(\mathbb{R}) / u \text{ is } 2\pi\text{-periodic}\}$ . If  $u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ , we say that  $u'' + u \geq 0$  if

$$\forall v \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \text{ with } v \geq 0, \int_{\mathbb{T}} (uv - u'v') d\theta \geq 0. \quad (2.4)$$

In this case,  $u'' + u$  is a nonnegative  $2\pi$ -periodic measure on  $\mathbb{R}$ ; we then denote  $S_u = \text{Supp}(u'' + u)$  the support of this measure.

As explained in the introduction, using the parameterization (2.2), we consider all open bounded shapes  $(\Omega_u)_{u>0}$ . A simple calculus of the curvature gives :

$$\kappa(\Omega_u) = \frac{u'' + u}{(1 + u'^2)^{3/2}},$$

which leads to the characterization of the convexity of  $\Omega_u$  by the linear condition  $u'' + u \geq 0$ . Moreover, straight lines in  $\partial\Omega_u$  are parameterized by the set  $\{u'' + u = 0\}$ , and corners in the boundary are seen as Dirac masses in the measure  $u'' + u$ .

We consider, as in [88, 42], the geometric constraint  $\partial\Omega_u \subset A(a, b)$  where  $A(a, b) := \{(r, \theta) / 1/b \leq r \leq 1/a\}$  is a closed annulus. So we consider the problem

$$\min \{j(u) := J(\Omega_u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad a \leq u \leq b\}, \quad (2.5)$$

where  $j : W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $0 < a < b$  are given. We are interested in sufficient conditions on  $j$  (less restrictive as possible) such that the problem (2.5) has for solution a polygon. We also look at the same question for the following problem with the volume constraint  $|\Omega_u| = m_0$  where  $m_0$  is given, namely

$$\min \left\{ j(u), \quad u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad m(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{u^2} = m_0 \right\}, \quad (2.6)$$

with  $m_0 > 0$ . Note that  $m(u)$  is the measure of the domain inside the curve  $\{(1/u(\theta), \theta), \theta \in \mathbb{T}\}$ .

**Theorem 2.2.1** *Let  $G : (\theta, u, p) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto G(\theta, u, p) \in \mathbb{R}$  be of class  $\mathcal{C}^2$  and set  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$ . Let  $u_0$  be a solution of (2.5) or (2.6) and assume that  $G$  is strongly concave in the third variable at  $u_0$ , that is to say*

$$G_{pp}(\theta, u_0, u'_0) < 0, \quad \forall \theta \in \mathbb{T}. \quad (2.7)$$

- If  $u_0$  is a solution of (2.5), then  $S_{u_0} \cap I$  is finite, for any  $I = (\gamma_1, \gamma_2) \subset \{\theta \in \mathbb{R}, a < u_0(\theta) < b\}$ , and in particular  $\Omega_{u_0}$  is locally polygonal inside the annulus  $A(a, b)$ ,
- If  $u_0 > 0$  is a solution of (2.6), then  $S_{u_0} \cap \mathbb{T}$  is finite, and so  $\Omega_{u_0}$  is a polygon.

Here  $S_{u_0}$  denotes the support of the measure  $u''_0 + u_0$ .

See sections 2.4.1 and 2.4.2 for a proof.

**Remark 2.2.1** We choose to analyze a volume constraint in (2.6) because this one is classical, and also to show that our approach can be adapted to nonlinear constraints. With a few adjustments, this approach can be adapted to some other constraints, regular enough in terms of  $u$ , see Proposition 2.3.3 and Section 2.4.2.

**Remark 2.2.2** The result is still true if  $u_0$  is only a local minimum of (2.5) or (2.6), since the proof only use the optimality conditions stated in Section 2.3.

**Remark 2.2.3** With the only assumptions of Theorem 2.2.1, it is not true that  $\Omega_{u_0}$  is a polygon if  $u_0$  is solution of (2.5). Indeed, a solution can saturate the constraint  $u \geq a$  or  $u \leq b$ , and in these cases,  $\partial\Omega_{u_0}$  contains an arc of circle. In some particular cases, a solution can also have an infinite number of corners. We refer to Section 2.5 for explicit examples.

In the following results, we want to go deeper in the analysis, in order to find conditions on  $G$  for the solution of (2.5) to be a polygon. As mentioned in Remark 2.2.3, we need to avoid that  $\partial\Omega_{u_0}$  touches the boundary of  $A(a, b)$  in an arc of circle, and also an accumulation of corners of  $\partial\Omega_{u_0}$  in a neighborhood of  $\partial A(a, b)$ . We treat two kinds of technical assumptions :

**Theorem 2.2.2** *Let  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(u, u')$  with  $G : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , and let  $u_0$  be a solution of (2.5). Assume that*

- (i)  $G$  is a  $\mathcal{C}^2$  function and  $G_{pp} < 0$  on  $\{(u_0(\theta), u'_0(\theta)), \theta \in \mathbb{T}\}$ ,
  - (ii) The function  $p \mapsto G(a, p)$  is even and one of the followings holds
    - (ii.1)  $G_u(a, 0) < 0$  **or**
    - (ii.2)  $G_u(a, 0) = 0$  and  $G_u(u_0, u'_0)u_0 + G_p(u_0, u'_0)u'_0 \leq 0$ ,
  - (iii) The function  $p \mapsto G(\cdot, p)$  is even and  $G_u \geq 0$  near  $(b, 0)$ .
- Then  $S_{u_0}$  is finite, i.e.  $\Omega_{u_0}$  is a polygon.*

The proof of this theorem follows from Theorem 2.2.1 and Proposition 2.4.1.

**Example 2.2.1** We can give the following geometric example :

$$J(\Omega) = \lambda|\Omega| - P(\Omega),$$

where  $|\cdot|$  denotes the area,  $P(\cdot)$  denotes the perimeter, and  $\lambda \in [0, +\infty]$ . The minimization of  $J$  within convex sets whose boundary is inside the annulus  $A(a, b)$  is in general non trivial.

When  $\lambda = 0$ , the solution is the disk of radius  $1/a$  (see [30] for a monotony property of perimeter with convex sets). When  $\lambda = +\infty$ , the solution is the disk of radius  $1/b$ .

We can easily check (see section 2.5 for more detailed examples) that  $j(u) = J(\Omega_u)$  satisfies hypothesis of Theorem 2.2.1, so any solution is locally polygonal inside  $A(a, b)$ . And from Theorem 2.2.2, if  $\lambda \in (a, b)$  (in order to get conditions (ii) and (iii)), any solution is a polygon.

We can prove the same result as in Theorem 2.2.2 with a weaker condition than the uniform condition given in (i), namely when  $G_{pp}(a, p) = 0$ , like in [88].

**Theorem 2.2.3** Let  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(u, u')$  with  $G : (0, \infty) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $C(b) = 2\pi b$  (see Lemma 2.4.1) and let  $u_0$  be a solution of (2.5). We assume that

- (i)  $G$  is a  $\mathcal{C}^3$  function,  $G_{pp} = 0$  in  $\{a\} \times [-C(b), C(b)]$ , and  $G_{pp} < 0$  in  $(a, b] \times [-C(b), C(b)]$ ,
- (ii)  $p \rightarrow G(a, p)$  is even,  $G_u(a, p) < 0$  for all  $p \in [-C(b), C(b)]$  and  $pG_{up}(a, p) = z(p)G_{upp}(a, p)$  for  $p \in (0, C(b)]$ , with a certain function  $z \geq 0$ ,
- (iii)  $p \rightarrow G(\cdot, p)$  is even and  $G_u \geq 0$  near  $(b, 0)$ .

Then  $S_{u_0}$  is finite, i.e.  $\Omega_{u_0}$  represents a polygon.

The proof of this theorem follows from Propositions 2.4.2 and 2.4.3.

**Remark 2.2.4** The hypotheses in Theorem 2.2.2 and 2.2.3 are quite general. In Section 2.5 we give certain examples showing that if one of these hypotheses is not satisfied, then the solutions of (2.5), in general, are not polygons.

**Remark 2.2.5** The condition (ii.2) in Theorem 2.2.2 (less natural than (ii.1)) has been motivated by the problem in [42], where  $G(u, p) = h(p/u)$  with  $h(\cdot)$  a  $\mathcal{C}^2$ , strictly concave, and even function. Such a  $G(u, p)$  satisfies the hypothesis of Theorem 2.2.2. Indeed,

- (a)  $G_{pp}(u, p) = h''(p/u)u^{-2}$ , so  $G_{pp}(u, p) < 0$  and (i) is satisfied,
- (b)  $G_u(u, p)u + G_p(u, p)p = 0$  and  $G_u(\cdot, 0) = 0$ , so (ii.2) is satisfied,
- (c)  $G_u(u, p) = -h'(p/u)\frac{p}{u^2} \geq 0$  so (iii) is satisfied.

Therefore the solution is a polygon. In [42], several more precise statements about the geometric nature of solutions are proven (in this particular case).

**Remark 2.2.6** Similarly, Theorem 2.2.3 gives a generalization of the problem studied in [88]. Indeed, in this problem, they have  $G(u, p) = h_1(u) - p^2 h_2(u)$  with  $h_1, h_2$  two  $\mathcal{C}^2$  functions satisfying  $h'_1(a) < 0$ ,  $h'_1(b) > 0$ ,  $h_2(a) = 0$ , and  $\forall t > a$ ,  $h_2(t) > 0$  ( $G$  is not  $\mathcal{C}^3$  in this case, but in fact we only need the existence of  $G_{upp}$ , which is clear here).

The function  $G(u, p)$  satisfies the hypothesis of Theorem 2.2.3 as  $p \rightarrow G(u, p)$  is even and

- (a)  $G_{pp}(u, p) = -2h_2(u)$ , so (i) is satisfied.
- (b)  $G_u(a, p) = h'_1(a) < 0$  and  $G_{up}(a, p) = -2ph'_2(a)$ ,  $G_{upp}(a, p) = -2h'_2(u)$ , so  $G_{up}(u, p) = pG_{upp}(u, p)$ , and therefore (ii) is satisfied.
- (c)  $G_u(u, p) = h'_1(u) - p^2 h'_2(u)$  so  $G_u(b, 0) = h'_1(b) > 0$ .

This last assumption is not specified in [88], but according to us, we need this one, see Section 2.5.2. In fact, it seems that the case of an accumulation of corners in the interior boundary  $\{u_0 = b\}$  is not considered in [88] (see Proposition 2.4.1, case (b)).

So the solution is a polygon. In [88], it is also proven that this polygon is regular in this particular case.

**Remark 2.2.7** Les us make some comments on the question of existence. For the problem (2.5), there always exists a solution, if for example  $j$  is continuous in  $H^1(\mathbb{T})$  (see below for a definition). Indeed, the minimization set  $\{u \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}) / u'' + u \geq 0, a \leq u \leq b\}$  is strongly compact in  $H^1(\mathbb{T})$ . About the problem (2.6) with a measure constraint, the question is more specific. For example, if

one looks at the problem of maximization of the perimeter (for which the concavity assumptions is satisfied), with convexity and measure constraints, we are in a case of non-existence (the sequence of rectangles  $\Omega_n = (-n/2, n/2) \times (-m_0/2n, m_0/2n)$  satisfies the constraints, whereas the perimeter is going to  $+\infty$ ). However, existence may be proved for many further functionals. In Theorem 2.2.1, we avoid this issue by asking the solution to be positive (and so to represent a convex bounded set of dimension 2).

## 2.3 First and second order optimality conditions

As we noticed in Remark 2.2.7, the minimization set is compact. So there are very few directions to write optimality. However, we are able in this section to write general optimality conditions for our problem.

Let us first introduce an abstract setting (see [76], [102]). Let  $U, Y$  be two real Banach spaces, let  $K$  be a nonempty closed convex cone in  $Y$  and let  $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g : U \rightarrow Y$ . We consider the minimization problem

$$\min\{f(u), u \in U, g(u) \in K\}. \quad (2.8)$$

We denote by  $U'$  (resp.  $Y'$ ) the Banach space of continuous linear maps from  $U$  (resp.  $Y$ ) into  $\mathbb{R}$  (dual spaces of  $U, Y$ ), and we introduce

$$Y'_+ = \{l \in Y'; \forall k \in K, l(k) \geq 0\}.$$

The following result is a particular case of Theorem 3.2 and 3.3 stated in [102] which will be sufficient for our purpose.

**Proposition 2.3.1** *Let  $u_0 \in U$  be a solution of the minimization problem (2.8). Assume  $f$  and  $g$  are twice (Fréchet-)differentiable at  $u_0$  and that  $g'(u_0)(U) = Y$ . Then,*

- (i) *there exists  $l \in Y'_+$  such that  $f'(u_0) = l \circ g'(u_0)$  and  $l(g(u_0)) = 0$ ,*
- (ii) *if  $F(u) := f(u) - l(g(u))$ , then  $F''(u_0)(v, v) \geq 0$  for all  $v \in T_{u_0}$  where*

$$T_{u_0} = \{v \in U; f'(u_0)(v) = 0, g'(u_0)(v) \in K_{g(u_0)} = \{K + \lambda g(u_0); \lambda \in \mathbb{R}\}\}.$$

**Remark 2.3.1** When applying the second order optimality condition (ii), we have to check whether well-chosen  $v \in U$  are in  $T_{u_0}$ . This may be done by using (i) and the information on the linear map  $l$ . We may use instead the following : assume  $g(u_0 + tv) \in K$  for  $t > 0$  small, or, more generally that

$$u_0 + tv = v_t + t\varepsilon(t) \text{ with } \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \varepsilon(t) = 0 \text{ and } g(v_t) \in K; \quad (2.9)$$

then

$$f'(u_0)(v) \geq 0 \text{ and } g'(u_0)(v) \in K_{g(u_0)}. \quad (2.10)$$

To see this, we write the two following lines :

$$0 \leq t^{-1}[f(v_t) - f(u_0)] = f'(u_0)(v) + \varepsilon_1(t) \text{ where } \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \varepsilon_1(t) = 0,$$

$$g'(u_0)(v) = t^{-1}[g(v_t) - g(u_0)] + \varepsilon_2(t) \text{ where } \lim_{t \rightarrow 0, t > 0} \varepsilon_2(t) = 0,$$

and we let  $t$  tend to zero.

If now, (2.9) is valid for all  $t$  small ( $t > 0$  and  $t < 0$ ), then  $v \in T_{u_0}$ . □

For our purpose, we choose  $U = H^1(\mathbb{T})$  the Hilbert space of functions from  $\mathbb{R}$  into  $\mathbb{R}$  which are in  $H^1_{loc}(\mathbb{R})$  and  $2\pi$ -periodic, equipped with the scalar product

$$\forall u, v \in U, (u, v)_{U \times U} = \int_{\mathbb{T}} u v + u' v'.$$



Let  $g_0 : U \rightarrow U'$  be defined by

$$\forall u, v \in U, \quad g_0(u)(v) = \int_{\mathbb{T}} u v - u' v'.$$

For  $l \in U'$  we say  $l \geq 0$  in  $U'$  if  $l(v) \geq 0$  for all  $v \in U$ . Note that, if  $g_0(u) \geq 0$  in  $U'$  then  $u + u''$ , computed in the sense of distributions in  $\mathbb{R}$ , is a  $2\pi$ -periodic nonnegative measure on  $\mathbb{R}$ , and we have

$$g_0(u)(v) = \int_{\mathbb{T}} u v - u' v' = \int_{\mathbb{T}} v d(u + u''). \quad (2.11)$$

Note also, for further purposes, that  $g_0(U)$  is a closed subspace of  $U'$  which may be described as the "orthogonal" of the kernel of  $g_0$  (because  $\overline{R(g_0)} = N(g_0^*)^\perp$ , with  $g_0^*$  the adjoint of  $g_0$ ), namely

$$g_0(U) = \{z \in U'; \forall v \in \text{Ker } g_0, z(v) = 0\} = \{z \in U'; z(\cos) = z(\sin) = 0\},$$

(and  $\cos, \sin$  denote the usual cosine and sine functions on  $\mathbb{R}$ ).

Finally, if  $l$  is a continuous linear map from  $g_0(U)$  into  $\mathbb{R}$  (that is  $l \in g_0(U)'$ ), then, thanks to the Hilbert space structure, there exists  $\zeta \in U$  such that

$$\forall z \in g_0(U), \quad l(z) = \langle z, \zeta \rangle_{U' \times U}, \quad (\zeta, \cos)_{U \times U} = (\zeta, \sin)_{U \times U} = 0. \quad (2.12)$$

### First problem :

Let  $j : U \rightarrow \mathbb{R}$  be  $\mathcal{C}^2$ . We set  $Y := g_0(U) \times U \times U$  equipped with its canonical Hilbert space structure whose scalar product writes :  $\forall y = (z, u_1, u_2), \widehat{y} = (\widehat{z}, \widehat{u}_1, \widehat{u}_2) \in Y$ ,

$$\langle y, \widehat{y} \rangle_{Y \times Y} := \langle z, \widehat{z} \rangle_{U' \times U'} + (u_1, \widehat{u}_1)_{U \times U} + (u_2, \widehat{u}_2)_{U \times U}.$$

And we define  $g : U \rightarrow Y$  and  $K \subset Y$  by

$$g(u) = (g_0(u), u - a, b - u), \quad K = \{(z, u_1, u_2) \in Y; z \geq 0 \text{ in } U', u_1, u_2 \geq 0 \text{ in } U\}.$$

We look at the minimization problem (see Lemma 2.4.1 and Remarks 2.3.2 and 2.4.1 for details about the choice of the two functional spaces  $H^1(\mathbb{T})$  and  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ ) :

$$\min\{j(u), u \in U, g(u) \in K\}. \quad (2.13)$$

**Proposition 2.3.2** *If  $u_0$  is a solution of (2.13) where  $j : H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  is  $\mathcal{C}^2$ , then there exist  $\zeta_0 \in H^1(\mathbb{T})$  nonnegative,  $\mu_a, \mu_b \in \mathcal{M}^+(\mathbb{T})$  (space of nonnegative Radon measure on  $\mathbb{T}$ ) such that*

$$\zeta_0 = 0 \text{ on } S_{u_0}, \quad \text{Supp}(\mu_a) \subset \{u_0 = a\}, \quad \text{Supp}(\mu_b) \subset \{u_0 = b\} \quad (2.14)$$

$$\text{and } \forall v \in H^1(\mathbb{T}), \quad j'(u_0)v = \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{U' \times U} + \int_{\mathbb{T}} v d\mu_a - \int_{\mathbb{T}} v d\mu_b. \quad (2.15)$$

Moreover,  $\forall v \in H^1(\mathbb{T})$  such that  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  with  $\begin{cases} v'' + v \geq \lambda(u_0'' + u_0) \\ v \geq \lambda(u_0 - a), v \leq \lambda(u_0 - b), \\ \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{U' \times U} + \int_{\mathbb{T}} v d(\mu_a - \mu_b) = 0 \end{cases}$

$$\text{we have } j''(u_0)(v, v) \geq 0. \quad (2.16)$$

**Remark 2.3.2** We choose here to work in the space  $H^1(\mathbb{T})$ , whereas the problem is more naturally settled in  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ . This choice is motivated by the fact that  $H^1(\mathbb{T})$  is reflexive. If we had worked in  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ , we would have obtained a Lagrange multiplier in the bidual  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})''$ , which is not so easy to make explicit. Nevertheless, this choice of  $H^1(\mathbb{T})$  leads to this new difficulty : for  $G$  regular, the functional  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$  is generally not well defined on  $H^1(\mathbb{T})$ , and so we cannot directly apply Proposition 2.3.2. We explain in Section 2.4.1 the adjustments that are needed to apply this one.

**Proof.** We apply Proposition 2.3.1 with the notations just introduced above. The main assumption  $g'(u_0)(U) = Y$  is satisfied since  $g'(u_0) = (g_0, I, -I)$  where  $I$  denotes the identity. By the statement (i) there exists  $l = (l_0, l_a, l_b) \in Y'_+$  and thanks to the remarks (2.11), (2.12), there exists  $(\zeta_0, \mu_a, \mu_b) \in U \times U' \times U'$  such that

- $\forall v \in U, j'(u_0)(v) = \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{U' \times U} + \int_{\mathbb{T}} v d\mu_a - \int_{\mathbb{T}} v d\mu_b,$
- $\mu_a$  is a nonnegative measure and  $\int_{\mathbb{T}} (u - a) d\mu_a = 0$  or  $\text{Supp}(\mu_a) \subset \{u_0 = a\},$
- $\mu_b$  is a nonnegative measure and  $\int_{\mathbb{T}} (b - u) d\mu_b = 0$  or  $\text{Supp}(\mu_b) \subset \{u_0 = b\},$
- $(\zeta_0, \cos)_{U \times U} = (\zeta_0, \sin)_{U \times U} = 0, \int_{\mathbb{T}} \zeta_0 d(u_0 + u_0'') = 0$  and

$$\forall v \in U \text{ with } g_0(v) \geq 0, \int_{\mathbb{T}} \zeta_0 v - \zeta_0' v' \geq 0. \quad (2.17)$$

Let now  $v \in U$  with  $v + v'' = \psi(\theta)(u_0 + u_0'')$  with  $\psi$  Borel measurable and bounded. Then,  $g_0(\|\psi\|_{L^\infty} u_0 \pm v) \geq 0$  so that  $\langle \zeta_0, g_0(\|\psi\|_{L^\infty} u_0 \pm v) \rangle_{U \times U'} \geq 0$ . It follows that

$$|\langle \zeta_0, g_0(v) \rangle_{U \times U'}| \leq \|\psi\|_{L^\infty} \langle \zeta_0, g_0(u_0) \rangle_{U \times U'} = 0. \quad (2.18)$$

But this information on  $\zeta_0$  is not sufficient to obtain the first property of (2.14), namely  $\zeta_0(u_0'' + u_0) \equiv 0$ . For this, we now show that it is possible to change  $\zeta_0$  into  $Z_0 = \zeta_0 + a \cos + b \sin$  so that all same properties remain valid, but also  $Z_0(u_0'' + u_0) \equiv 0$ .

Since  $\int_{\mathbb{T}} (v + v'') \cos = 0 = \int_{\mathbb{T}} (v + v'') \sin$ , we also have (2.15) for  $Z_0$  in place of  $\zeta_0$ . Moreover, (2.18) is also true for  $Z_0$ , that is to say : for every  $\psi$  Borel measurable and bounded such that  $v + v'' = \psi(\theta)(u_0 + u_0'')$  for some  $v \in U$ ,  $\int_{\mathbb{T}} \psi Z_0 d\nu = 0$ , where we denote  $\nu = u_0 + u_0''$ .

Let us show that we can find  $a, b \in \mathbb{R}$  so that  $Z_0 \nu \equiv 0$  and  $Z_0 \geq 0$ , and the proof of Proposition 2.3.2 will be complete.

Let us choose  $a, b$  so that

$$\int_{\mathbb{T}} \cos \theta Z_0(\theta) d\nu(\theta) = 0 = \int_{\mathbb{T}} \sin \theta Z_0(\theta) d\nu(\theta), \quad (2.19)$$

which writes

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{T}} \cos \theta \zeta_0(\theta) d\nu(\theta) + a \int_{\mathbb{T}} \cos^2 \theta d\nu(\theta) + b \int_{\mathbb{T}} \cos \theta \sin \theta d\nu(\theta) = 0, \\ \int_{\mathbb{T}} \sin \theta \zeta_0(\theta) d\nu(\theta) + a \int_{\mathbb{T}} \sin \theta \cos \theta d\nu(\theta) + b \int_{\mathbb{T}} \sin^2 \theta d\nu(\theta) = 0. \end{cases} \quad (2.20)$$

This is possible since  $CS - B^2 \neq 0$  where

$$C = \int_{\mathbb{T}} \cos^2 \theta d\nu(\theta), \quad S = \int_{\mathbb{T}} \sin^2 \theta d\nu(\theta), \quad B = \int_{\mathbb{T}} \cos \theta \sin \theta d\nu(\theta).$$

Indeed, by Schwarz' inequality, we have  $B^2 \leq CS$  and equality would hold only if we had

$$\cos \theta = \lambda \sin \theta \quad \nu - a.e \theta,$$

for some  $\lambda \in \mathbb{R}$  and it is not the case since  $\nu$  has at least 3 distinct points in its support.

Let now  $\varphi$  be a Borel measurable bounded function on  $\mathbb{T}$ . Let  $\psi := \varphi + \alpha \cos + \beta \sin$  where  $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$  are chosen so that  $\psi \nu = v + v''$  for some  $v \in U$ , or equivalently

$$\begin{cases} \int_{\mathbb{T}} \cos \theta [\varphi + \alpha \cos + \beta \sin](\theta) d\nu(\theta) = 0, \\ \int_{\mathbb{T}} \sin \theta [\varphi + \alpha \cos + \beta \sin](\theta) d\nu(\theta) = 0. \end{cases} \quad (2.21)$$

Again, this is possible since  $CS - B^2 \neq 0$ . Next, we deduce from (2.19), then from (2.18) that

$$\int_{\mathbb{T}} \varphi Z_0 d\nu = \int_{\mathbb{T}} \psi Z_0 d\nu = 0.$$

By arbitrariness of  $\varphi$ , this implies  $Z_0 \nu \equiv 0$  as expected. This gives (2.14) and (2.15) with  $Z_0$  in place of  $\zeta_0$ .

We now prove that  $Z_0$  is nonnegative :  $\text{Supp}(u_0'' + u_0)^c = \bigcup_n \omega_n$  where  $\omega_n$  are open intervals.

Then, if  $\psi \geq 0$  is regular with a compact support in  $\omega_n$ , we can introduce  $v \in H_0^1(\omega_n)$  satisfying  $v'' + v = \psi$  in  $\omega_n$  (possible since  $\text{diam}(\omega_n) < \pi$ ). We define  $v$  by 0 outside  $\omega_n$ . Thus  $v'' + v$  has Dirac mass at  $\partial\omega_n$ , but since  $Z_0$  vanishes at  $\partial\omega_n$ , we finally get, using (2.17) :

$$\int_{\omega_n} Z_0 \psi d\theta = \int_{\mathbb{T}} Z_0 d(v'' + v) = 0.$$

Since  $\psi$  is arbitrary, we get  $Z_0 \geq 0$  in  $\omega_n$ , and then  $Z_0 \geq 0$  in  $\mathbb{T}$ .

By the statement (ii) of Proposition 2.3.1, for each  $v \in U$  satisfying

$$f'(u_0)(v) = 0, \exists \lambda \in \mathbb{R}, g_0(v) \geq \lambda g_0(u_0), v \geq \lambda(u_0 - a), v \leq \lambda(u_0 - b), \quad (2.22)$$

we have  $f''(u_0)(v, v) \geq 0$  (the constraint  $g$  is linear, so  $g'' = 0$ ). Whence Proposition 2.3.2, with  $Z_0$  in place of  $\zeta_0$ .  $\square$

**Remark 2.3.3** In general, the positivity of  $\zeta_0$  on the orthogonal of  $\{\cos, \sin\}$  does not imply that it is pointwise positive (one can write explicit examples).

**Remark 2.3.4** In the following section, the main difficulty will be to analyze the situation where the convexity constraint is almost everywhere saturated. It would be easy to prove the non-existence of a nonempty interval  $I \subset S_{u_0} \cap \{a < u_0 < b\}$ . However, this is not sufficient to conclude that  $u_0'' + u_0$  is a sum of Dirac masses (we can look at the Lebesgue decomposition of measures to see this). That is why we have to analyze the case of infinitely many corners, or even of a diffuse singular measure (see the proof of Theorem 2.2.1).

Another way to avoid these difficulties has been chosen by M. Crouzeix in [42] for his particular problem (see Remark 2.2.5) : he considers the minimization problem restricted to convex polygons having at most  $n$  edges, and proves that with  $n$  large enough, any solution in this restricted class has only  $n_0$  edges where  $n_0$  is only determined by  $a$  and  $b$ . Therefore, using the density of convex polygons in convex sets, the solution for this particular problem (2.5) is still a polygon.

**Remark 2.3.5** Our analysis in Section 2.4 could easily show on some simple examples that the first order equation is not sufficient to get the results of Theorems 2.2.1, 2.2.2 or 2.2.3. It turns out that the second order condition is very helpful.

## Second problem :

Similarly, we can give the optimality conditions in the case of the measure constraint :

$$\min \left\{ j(u), \quad u \in H^1(\mathbb{T}), \quad u'' + u \geq 0, \quad m(u) := \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} \frac{d\theta}{u^2} = m_0 \right\}, \quad (2.23)$$

**Proposition 2.3.3** If  $u_0$  solves (2.23) where  $j : H^1(\mathbb{T}) \rightarrow \mathbb{R}$  is  $\mathcal{C}^2$ , then there exist  $\zeta_0 \in H^1(\mathbb{T})$  nonnegative,  $\mu \in \mathbb{R}$  such that

$$\zeta_0 = 0 \text{ on } S_{u_0}, \quad (2.24)$$

$$\text{and } \forall v \in H^1(\mathbb{T}), \quad j'(u_0)v = \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{U' \times U} - \mu m'(u_0)(v). \quad (2.25)$$

Moreover, for all  $v \in H^1(\mathbb{T})$ , such that  $\exists \lambda \in \mathbb{R}$  satisfying  $\begin{cases} v'' + v \geq \lambda(u_0'' + u_0) \\ \langle \zeta_0 + \zeta_0'', v \rangle_{U' \times U} - \mu m'(u_0)(v) = 0 \end{cases}$ ,

$$\text{we have } j''(u_0)(v, v) + \mu m''(u_0)(v, v) \geq 0. \quad (2.26)$$

**Proof.** We make the same choices except for

$$Y = g_0(U) \times \mathbb{R}, \quad g : U \rightarrow Y, \forall u \in U, \quad g(u) = (g_0(u), m(u) - m_0),$$

and  $K = \{z \in g_0(U), z \geq 0 \text{ in } U'\} \times \{0\} \subset Y$ .

Here, using  $\min(u_0) > 0$ , we have

$$\forall v \in U, g'(u_0)(v) = (g_0(v), m'(u_0)(v)) = \left( g_0(v), - \int_{\mathbb{T}} \frac{v d\theta}{u_0^3} \right)$$

and  $g'(u_0)(U) = g_0(U) \times \mathbb{R} = Y$ . Therefore, we may apply Proposition 2.3.1, and similarly to the proof of Proposition 2.3.2, we get the result.  $\square$

## 2.4 Proofs

### 2.4.1 Proof of Theorem 2.2.1, case of inclusion in $A(a, b)$

First of all, we have to prove that  $u'$  is bounded by a constant  $C(b)$ , for all  $u$  admissible.

#### Lemma 2.4.1

$$\forall u \in H^1(\mathbb{T}), \left[ 0 \leq u \leq b, u'' + u \geq 0 \implies \|u'\|_{L^\infty} \leq 2\pi b =: C(b) \right]$$

**Proof of lemma 2.4.1** Since  $u$  is periodic, there exists  $x_0 \in \mathbb{T}$  such that  $u'(x_0) \geq 0$ . With  $x \in [x_0, x_0 + 2\pi]$  and integrating the inequality  $u'' + u \geq 0$ , we get  $u'(x) - u'(x_0) + \int_{x_0}^x u \geq 0$  which leads to  $u'(x) \geq -2\pi b$ , true for all  $x \in \mathbb{R}$  by periodicity.

Similarly with  $x_1$  such that  $u'(x_1) \leq 0$  and  $x \in [x_1 - 2\pi, x_1]$ , we get  $u'(x) \leq 2\pi b$  which leads to the result with  $C(b) = 2\pi b$ .  $\square$

**Remark 2.4.1** With the help of this lemma, let us explain how we can use Proposition 2.3.2, whereas  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$  is a priori not defined on  $H^1(\mathbb{T})$  : if  $\eta(u, p)$  is a  $C^\infty$  cut-off function, with  $0 \leq \eta \leq 1$  and such that

$$\eta = \begin{cases} 1, & (u, p) \in [a/2, 2b] \times [-2C(b), 2C(b)], \\ 0, & \text{otherwise,} \end{cases}$$

where  $C(b)$  is introduced in Lemma 2.4.1, then we can set  $\tilde{j}(u) := \int_{\mathbb{T}} \tilde{G}(\theta, u, u') d\theta$ , with  $\tilde{G}(\theta, u, p) := \eta(u, p)G(\theta, u, p)$ . Easily, the new functional  $\tilde{j}$  is  $C^k$  in  $H^1(\mathbb{T})$  if  $G$  is  $C^k$  in  $\mathbb{T} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ . Moreover, by the choice of  $\eta$ , any solution of the problem (2.5) is still solution for  $\tilde{j}$  instead of  $j$ , and we can write first and second order necessary conditions for the function  $\tilde{j}$ , in terms of  $\tilde{G}$ .

We easily check that  $\tilde{G}$  still satisfy the hypothesis in Theorem 2.2.1, since  $\eta = 1$  in a neighborhood of  $[a, b] \times [-C(b), C(b)]$  (this will also be true for Theorems 2.2.2 and 2.2.3). We drop the notation  $\tilde{\cdot}$  in all what follows.

#### Proof of Theorem 2.2.1, case of inclusion in $A(a, b)$ :

Assume by contradiction that  $u_0$  does not satisfy the conclusion. Therefore there exists an interval  $I \subset \{a < u_0 < b\}$  and  $\theta_0$  an accumulation point of  $S_{u_0} \cap I$ .

##### (a) Case $a < u_0(\theta_0) < b$ .

Without loss of generality we can assume  $\theta_0 = 0$  and also that there exists a decreasing sequence  $(\varepsilon_n)$  tending to 0 such that  $S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ . Then we follow an idea of T. Lachand-Robert and M.A. Peletier (see [88]). We can always find  $0 < \varepsilon_n^i < \varepsilon_n$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , increasing with respect to  $i$ , such that  $S_{u_0} \cap (\varepsilon_n^i, \varepsilon_n^{i+1}) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 3$ . We consider  $v_{n,i}$  solving

$$v_{n,i}'' + v_{n,i} = \chi_{(\varepsilon_n^i, \varepsilon_n^{i+1})}(u_0'' + u_0), \quad v_{n,i} = 0 \text{ in } (0, \varepsilon_n)^c, \quad i = 1, 3.$$

Such  $v_{n,i}$  exist since we avoid the spectrum of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions. Next, we look for  $\lambda_{n,i}$ ,  $i = 1, 3$  such that  $v_n = \sum_{i=1,3} \lambda_{n,i} v_{n,i}$  satisfy

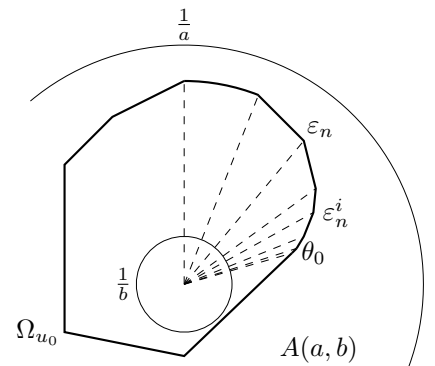


Figure 1 : Case (a)

$$v_n'(0^+) = v_n'(\varepsilon_n^-) = 0.$$

The above derivatives exist since  $v_{n,i}$  are regular near 0 and  $\varepsilon_n$  in  $(0, \varepsilon_n)$ . We can always find such  $\lambda_{n,i}$  as they satisfy two linear equations. It implies that  $v_n''$  does not have any Dirac mass at 0 and  $\varepsilon_n$ . Since  $S_{u_0} \cap (\varepsilon_n^i, \varepsilon_n^{i+1}) \neq \emptyset$ , we have  $v_n \neq 0$ . From (2.14) and  $\text{Supp}(v_n) \subset \{a < u_0 < b\}$  it follows that for such  $v_n$  we have

$$\int_{\mathbb{T}} v_n(\zeta_0 + \zeta_0'') = \int_{\mathbb{T}} v_n d\mu_a = \int_{\mathbb{T}} v_n d\mu_b = 0.$$



**Remark 2.4.3** Assume that  $\omega \subset \bar{\omega} \subset \{a < u_0 < b\}$ , with  $\omega$  an open connected set, and that  $n_\omega = \#\{\theta_n \in \omega\} \geq 3$ , with  $n \rightarrow \theta_n$  increasing. Consider  $v \in H_0^1(\theta_1, \theta_3)$  satisfying  $v'' + v = \delta_{\theta_2}$ . The function  $v$  is admissible for the second order necessary condition. Similarly to the case (a) we find the following estimation :

$$\frac{\theta_3 - \theta_1}{\pi} \geq \frac{K_{pp}}{K_{up} + \sqrt{K_{up}^2 + K_{uu}K_{pp}}} =: C(G, a, b),$$

Therefore, we get

$$\#\{\theta_n \in \omega\} \leq 2 \left\lfloor \frac{2\pi}{C(G, a, b)} \right\rfloor + 1,$$

where  $\lfloor \cdot \rfloor$  denotes the floor function.

**Remark 2.4.4** Theorem 2.2.1 and its proof are valid for non integral operators : if  $j(u) = g(u, u')$  with  $g : (u, p) \in W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \times L^\infty(\mathbb{T}) \mapsto g(u, p) \in \mathbb{R}$ , of class  $\mathcal{C}^2$  and satisfying

$$|g_{uu}(u_0, u'_0)(v, v)| \leq K_{uu}\|v\|_{L^\infty}^2, \quad |g_{up}(u_0, u'_0)(v, v')| \leq K_{up}\|v\|_{L^\infty}\|v'\|_{L^2}, \quad g_{pp}(u_0, u'_0)(v', v') \leq -K_{pp}\|v'\|_{L^2}^2$$

for some  $K_{uu}, K_{up}, K_{pp} > 0$ , the main argument (2.27) still works (with a more precise Poincaré inequality, valid in dimension 1, namely  $\|u\|_{L^\infty(0,\varepsilon)} \leq \sqrt{\varepsilon}\|u'\|_{L^2(0,\varepsilon)}, \forall u \in H_0^1(0, \varepsilon)$ ).

## 2.4.2 Proof of Theorem 2.2.1, case of volume constraint

First, we point out that as  $0 < u_0 \in H^1(\mathbb{T})$ , we may assume that there exist  $0 < a < b$  such that  $a < u_0 < b$ . Therefore, similarly to the case of inclusion in the annulus (see Remark 2.4.1), we introduce a cut-off function to get a new  $\tilde{G}$  and a new functional  $\tilde{j}$ , which is equal to  $j$  on  $\{u \in H^1(\mathbb{T}) ; a < u < b \text{ and } |u'| \leq C(b)\}$  and therefore, any solution of the problem (2.6) is still solution of

$$\min \left\{ \tilde{j}(u), \quad u \in H^1(\mathbb{T}), \quad a < u < b, \quad u'' + u \geq 0, \quad m(u) = m_0 \right\}. \quad (2.29)$$

We can apply Proposition 2.3.3 and write first and second order necessary conditions for the function  $\tilde{j}$ , in terms of  $\tilde{G}$  (the constraint  $a < u < b$  does not appear in the optimality condition, because these constraints are not saturated). It is easy to check that  $\tilde{G}$  still satisfies the hypothesis in Theorem 2.2.1. In the following, we denote by  $j$ , resp.  $G$ , the function  $\tilde{j}$ , resp.  $\tilde{G}$ .

Now, we assume by contradiction that  $u_0$  does not satisfy the theorem. Therefore there exists at least one accumulation point  $\theta_0$  of  $S_{u_0}$ . Without loss of generality we can assume  $\theta_0 = 0$ , and that there exists a decreasing sequence  $\{\varepsilon_n > 0\}$  tending to 0 such that  $S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ . Then we can always find  $0 < \varepsilon_n^i < \varepsilon_n$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , decreasing with respect to  $i$ , such that  $S_{u_0} \cap (\varepsilon_n^{i+1}, \varepsilon_n^i) \neq \emptyset$ ,  $i = 1, 4$ . We consider  $v_{n,i}$  solving

$$v_{n,i}'' + v_{n,i} = \chi_{(\varepsilon_n^{i+1}, \varepsilon_n^i)}(u_0'' + u_0), \quad v_{n,i} = 0 \text{ in } (0, \varepsilon_n)^c, \quad i = 1, 4.$$

Next, we extend the same idea of [88] that we used in the first part of the proof (section 2.4.1) as follows : we look for  $\lambda_{n,i}$ ,  $i = 1, 4$  such that  $v_n = \sum_{i=1,4} \lambda_{n,i} v_{n,i}$  satisfies

$$v_n'(0^+) = v_n'(\varepsilon_n^-) = m'(u_0)(v_n) = 0.$$

Note that the derivatives at  $0^+$  and  $\varepsilon_n^-$  are well defined as  $v_{n,i}$  are regular nearby 0 and  $\varepsilon_n$  in the interval  $(0, \varepsilon_n)$ . Such a choice of  $\lambda_{n,i}$  is always possible as  $\lambda_{n,i}$  satisfy three linear equations. Moreover,  $v_n$  is not zero since  $S_{u_0} \cap (\varepsilon_n^i, \varepsilon_n^{i+1}) \neq \emptyset$ . Using (2.24), we get  $\int_{\mathbb{T}} v_n(\zeta_0 + \zeta_0'') = 0$ , which implies

$$0 = j'(u_0)(v_n) = \int_{\mathbb{T}} v_n(\zeta_0 + \zeta_0'') = m'(u_0)(v_n).$$

As  $v_n'' + v_n \geq \lambda(u_0'' + u_0)$  for  $\lambda \ll 0$ , it follows that  $v_n$  is eligible for the second order necessary condition. Then, using (2.7),

$$\begin{aligned} 0 &\leq j''(u_0)(v_n, v_n) = \int_{\mathbb{T}} \left( G_{uu}(\theta, u_0, u_0') + \frac{3\mu}{u_0^4} \right) v_n^2 + 2G_{up}(\theta, u_0, u_0') v_n v_n' + G_{pp}(\theta, u_0, u_0') v_n'^2 \\ &\leq \int_{\mathbb{T}} \left( K_{uu} + \frac{3|\mu|}{a^4} \right) v_n^2 + 2K_{up}|v_n||v_n'| - K_{pp}|v_n'|^2 \\ &\leq (o(1) - K_{pp}) \|v_n'\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

with  $o(1) \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$ , where we have used Poincaré's inequality in  $H_0^1(0, \varepsilon_n)$  (see (2.28) for the notation  $K_{uu}$ ,  $K_{up}$  and  $K_{pp}$ ). As  $n$  tends to  $\infty$ , the inequality  $0 \leq j''(u_0)(v_n, v_n)$  becomes impossible and this proves the theorem.  $\square$

### 2.4.3 Proof of Theorem 2.2.2

If  $j$  satisfies the hypotheses of Theorem 2.2.2, we can apply Theorem 2.2.1 (see also Remark 2.4.1). Therefore, it remains to prove the following result :

**Proposition 2.4.1** *Under the assumptions of Theorem 2.2.2, the sets  $\{u_0 = a\}$  and  $\{u_0 = b\}$  are finite.*

**Proof.** Assume by contradiction there exists  $\theta_0$  an accumulation point of  $\{(u_0 - a)(u_0 - b) = 0\}$ .

(a) **First case :**  $u_0(\theta_0) = a$ . Without loss of generality we can assume that  $\theta_0 = 0$  and that there exists a sequence  $\{\varepsilon_n > 0\}$  of  $S_{u_0}$  tending to 0, with  $u_0(\varepsilon_n) = a$  and  $S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ .

(a.1) First subcase : assume by contradiction that there exists a sequence  $\theta_n \in S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n)$  such that  $\theta_n \rightarrow \theta_0$  and  $a < u_0(\theta_n) < b$ . As  $\{\theta, a < u_0(\theta) < b\}$  is open, there exists an open connected set  $\omega_n$ ,  $\theta_n \in \omega_n \subset \{a < u_0 < b\}$ ,  $\text{diam}(\omega_n) \rightarrow 0$ ,  $u_0(\partial\omega_n) = a$ . Consider the function  $v_n$  given by  $v_n \in H^1(\mathbb{T})$ ,  $v_n'' + v_n = u_0'' + u_0 = \sum_{i=1}^{N_i} \alpha_i \delta_{\theta_n^i}$  in  $\omega_n$  (where  $N_i$  is finite),  $v_n = 0$  in  $\omega_n^c$  (from Theorem 2.2.1,  $u_0'' + u_0$  is a finite sum of Dirac masses in  $\omega_n$ ). It follows that for  $n$  large  $v_n$  is admissible (again using (2.14), and also that  $u_0 = a$  on  $\partial\omega$ ) for Proposition 2.3.2, since  $u_0'' + u_0$  has some Dirac masses in  $\partial\omega_n$ . Then we can apply the second order necessary condition, as in (b), Section 2.4.1, which leads to a contradiction, since  $\text{diam}(\omega_n)$  is going to 0.

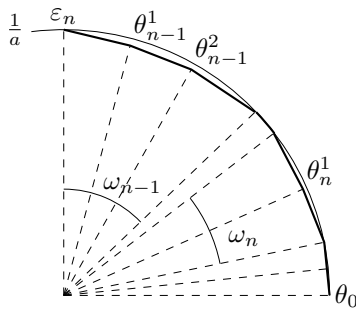


Figure 3 : Case (a.1)

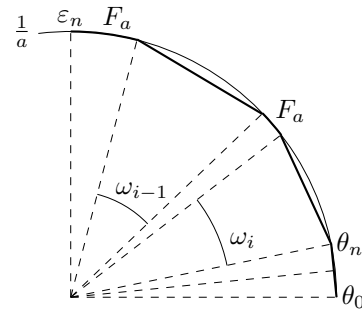


Figure 4 : Case (a.2)

(a.2) Second subcase :  $(0, \varepsilon_n) = F_a \cup \omega_i$  with  $F_a = \{u_0 = a\} \cap (0, \varepsilon_n)$  relatively closed and  $\omega_i \subset (0, \varepsilon_n)$  open intervals with  $u_0(\partial\omega_i) = a$  and  $u_0'' + u_0 = 0$  in  $\omega_i$ . Let  $v_n$  given by

$$v_n'' + v_n = -(u_0'' + u_0) \quad \text{in} \quad (0, \varepsilon_n), \quad v_n = 0 \quad \text{in} \quad (0, \varepsilon_n)^c.$$

We have  $v_n > 0$  on  $(0, \varepsilon_n)$  : indeed, as  $(u_0 + v_n)'' + (u_0 + v_n) = 0$  in  $(0, \varepsilon_n)$  (so  $u_0 + v_n$  represents a line),  $u_0 + v_n = u_0$  in  $\partial(0, \varepsilon_n)$  and  $u_0$  represents a convex curve, it follows that  $u_0 < u_0 + v_n$  on  $(0, \varepsilon_n)$  ( $v_n \not\equiv 0$  because  $S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n) \neq \emptyset$ ). Then for  $n$  large and  $t \geq 0$  small the function  $u_n = u_0 + tv_n$  satisfies  $a \leq u_n \leq b$ ,  $u_n'' + u_n \geq 0$  (we use that  $u_0'' + u_0$  has positive Dirac masses

at 0 and  $\varepsilon_n$ ). Therefore, we can use the first order inequality (see Remark 2.3.1)  $j'(u_0)(v_n) \geq 0$ , which gives

$$0 \leq j'(u_0)(v_n) = \int_{\mathbb{T}} G_u(u_0, u'_0)v_n + G_p(u_0, u'_0)v'_n.$$

If (ii) holds we have  $\int_{F_a} G_u(u_0, u'_0)v_n + G_p(u_0, u'_0)v'_n \leq 0$  because  $u_0 = a$  and  $u'_0 = 0$  a.e. in  $F_a$ ,  $G_u(a, 0) \leq 0$  and  $G_p(a, 0) = 0$  (as  $p \rightarrow G_p(a, p)$  is odd). So, if one of (ii) conditions holds, we have

$$0 \leq j'(u_0)(v_n) \leq \sum_i \int_{\omega_i} G_u(u_0, u'_0)v_n + G_p(u_0, u'_0)v'_n.$$

Note that we have  $\int_{\omega_i} G_u(u_0, u'_0)u'_0 + G_p(u_0, u'_0)u''_0 = [G(u_0, u'_0)]_{\partial\omega_i} = 0$ , since  $u'_0(\partial^+\omega_i) = -u'_0(\partial^-\omega_i)$  (where  $\omega_i = (\partial^-\omega_i, \partial^+\omega_i)$ ) and  $G(a, \cdot)$  is even. Therefore, from

$$v_n = \alpha_{n,i}u_0 + \beta_{n,i}u'_0 \quad \text{in } \omega_i, \quad \alpha_{n,i} = \frac{\int_{\omega_i} u_0 v_n}{\int_{\omega_i} u_0^2} > 0, \quad \beta_{n,i} = \frac{\int_{\omega_i} u'_0 v_n}{\int_{\omega_i} |u'_0|^2},$$

we get that if (ii) holds then

$$0 \leq j'(u_0)(v_n) \leq \sum_i \alpha_{n,i} \int_{\omega_i} G_u(u_0, u'_0)u_0 + G_p(u_0, u'_0)u'_0. \quad (2.30)$$

We now prove that

$$v_n \rightarrow 0, \quad \bar{u}_n \rightarrow a \quad \text{in } W^{1,\infty}(\mathbb{T}) \text{ as } n \rightarrow \infty, \quad (2.31)$$

where  $\bar{u}_n = u_0$  in  $(0, \varepsilon_n)$  and  $\bar{u}_n = a$  in  $(0, \varepsilon_n)^c$ . Indeed, the statement for  $\bar{u}_n$  follows from Corollary 2.1 because we have  $\|\bar{u}_n - a\|_{L^\infty} \rightarrow 0$  as  $n \rightarrow \infty$  (from  $|u_0(\theta) - a| \leq \sqrt{\varepsilon_n}\|u'_0\|_{L^2}$  for  $\theta \in (0, \varepsilon_n)$  and  $\bar{u}_n'' + \bar{u}_n \geq 0$ ). Next, from  $(\bar{u}_n + v_n)'' + (\bar{u}_n + v_n) = 0$  in  $(0, \varepsilon_n)$  and  $\bar{u}_n + v_n = a$  in  $(0, \varepsilon_n)^c$ , using again Corollary 2.1, we find out that  $\|(\bar{u}_n + v_n) - a\|_{W^{1,\infty}(\mathbb{T})} \rightarrow 0$ , which proves the statement for  $v_n$ .

Assume (ii.1) holds. We have  $\bar{u}_n \rightarrow a$  in  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$  as  $n \rightarrow \infty$ , so  $G_p(u_0, u'_0) = o(1)$  as  $n \rightarrow \infty$ , and then

$$0 \leq j'(u_0)(v_n) \leq \sum_i \alpha_{n,i} \int_{\omega_i} (G_u(a, 0)u_0 + o(1)),$$

which is impossible as  $n \rightarrow \infty$  because  $G_u(a, 0) < 0$  and  $\alpha_{n,i} > 0$ .

Now assume (ii.2) holds. In this case, we need a second order information : for  $n$  large we have

$$\begin{aligned} 0 &\leq j(u_0 + v_n) - j(u_0) = j'(u_0)(v_n) + \frac{1}{2}j''(\tilde{u}_n)(v_n, v_n) \\ &= \int_0^{\varepsilon_n} G_u(u_0, u'_0)v_n + G_p(u_0, u'_0)v'_n \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_n} G_{uu}(\tilde{u}_n, \tilde{u}'_n)v_n^2 + 2G_{up}(\tilde{u}_n, \tilde{u}'_n)v_n v'_n + G_{pp}(\tilde{u}_n, \tilde{u}'_n)|v'_n|^2 \\ &\leq \sum_i \alpha_{n,i} \int_{\omega_i} G_u(u_0, u'_0)u_0 + G_p(u_0, u'_0)u'_0 \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_n} (o(1) - \tilde{K}_{pp})|v'_n|^2. \end{aligned}$$

Here  $\tilde{u}_0 = u_0 + \sigma_n v_n$ ,  $\tilde{u}'_n = u'_0 + \sigma_n v'_n$  with a certain  $\sigma_n \in (0, 1)$ , and we used the estimation (2.30) for  $j'(u_0)(v_n)$ , which holds as it uses only the fact  $G_u(a, 0) \leq 0$ , and  $G_{pp}(\tilde{u}_n, \tilde{u}'_n) \leq -\tilde{K}_{pp} < 0$ . The existence of  $\tilde{K}_{pp} > 0$  follows from hypothesis (i), continuity of  $G_{pp}$  at  $(a, 0)$  and the  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$  convergence in (2.31). From (ii.2) we have  $\int_{\omega_i} G_u(u_0, u'_0)u_0 + G_p(u_0, u'_0)u'_0 \leq 0$  and therefore we get

$$0 \leq j(u_0 + v_n) - j(u_0) \leq \frac{1}{2} \int_0^{\varepsilon_n} (o(1) - \tilde{K}_{pp})|v'_n|^2,$$



which is impossible for  $n$  large and proves that this case is cannot occur.

**(b) Second case :**  $u_0(\theta_0) = b$ . Without loss of generality we may assume  $\theta_0 = 0$  and that there exists a sequence  $\varepsilon_n > 0$  decreasing and tending to 0 such that  $u_0(2\varepsilon_n) = b$ . From Theorem 2.2.1, it follows that  $(0, 2\varepsilon_n) = \cup_{i \in N_n} \omega_{n,i} \cup \{\theta_n^i, i \in N_n\} \cup F_b$  with  $F_b = \{u = b\} \cap (0, 2\varepsilon_n)$  relatively closed,  $N_n \subset \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ , and  $u_0'' + u_0 = 0$  in the open intervals  $\omega_{n,i}$  (see Figure 5).

Consider the function  $u_n \in H^1(\mathbb{T})$  given by

$$\begin{aligned} u_n &= u_0 && \text{in } (0, 2\varepsilon_n)^c, \\ u_n &= b \cos \theta && \text{in } (0, \varepsilon_n), \\ u_n &= b \cos(\theta - 2\varepsilon_n) && \text{in } (\varepsilon_n, 2\varepsilon_n), \end{aligned}$$

Let  $\sigma_n = \sup\{\theta \in (0, \varepsilon_n), u_0(\theta) = u_n(\theta)\}$ ,  $\tau_n = \inf\{\theta \in (\varepsilon_n, 2\varepsilon_n), u_0(\theta) = u_n(\theta)\}$ . We have  $u_0 = u_n$  in  $(0, \sigma_n) \cup (\tau_n, 2\varepsilon_n)$ . From the assumption of accumulation point, we must have  $\sigma_n < \varepsilon_n < \tau_n$ .

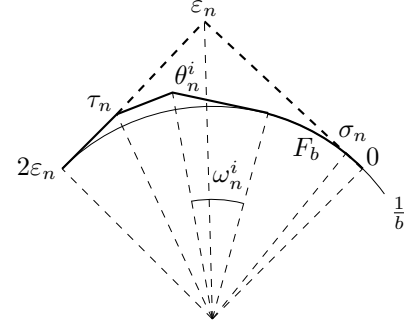


Figure 5 : Case (b)

Besides, we have

$$0 < u_n < u_0, \quad |u_0'| < |u_n'| \quad \text{a.e. in } (\sigma_n, \tau_n). \quad (2.32)$$

The first inequality is clear. For the other inequality we point out that  $0 = u_0' < |u_n'|$  a.e. in  $F_b$ , and  $|u_n'|^2 + u_n^2 = b^2$ ,  $|u_0'|^2 + u_0^2 = c^2$  in  $\omega_{n,i} \cap (\sigma_n, \tau_n)$ , for some  $c$  with  $b^2 \geq c^2$ . Therefore

$$|u_n'|^2 - |u_0'|^2 = b^2 - c^2 + u_0^2 - u_n^2 > 0 \quad \text{in } \omega_{n,i} \cap (\sigma_n, \tau_n).$$

We also note that as in the case (a.2),  $u_n \rightarrow b$  in  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$ . As  $u_n$  satisfies  $a \leq u_n \leq b$ ,  $u_n'' + u_n \geq 0$ , and  $p \rightarrow G(u, p)$  is even near  $(b, 0)$  we get

$$\begin{aligned} 0 &\leq j(u_n) - j(u_0) = \int_0^{\varepsilon_n} G(u_n, |u_n'|) - G(u_0, |u_0'|) \\ &= \int_{\sigma_n}^{\tau_n} \left( G(u_n, |u_n'|) - G(u_n, |u_0'|) \right) + \left( G(u_n, |u_0'|) - G(u_0, |u_0'|) \right) \\ &= \int_{\sigma_n}^{\tau_n} (|u_n'| - |u_0'|) G_p(u_n, |u_0'| + t(|u_n'| - |u_0'|)) + (u_n - u_0) G_u(u_0 + s(u_n - u_0), |u_0'|) d\theta, \end{aligned}$$

with  $0 < t, s < 1$ . But from the parity of  $p \mapsto G(\cdot, p)$  and  $G_{pp} < 0$  near  $(b, 0)$ , it follows that  $G_p(\cdot, p) < 0$  for  $p > 0$  near  $(b, 0)$ . Then from the assumption  $G_u \geq 0$  near  $(b, 0)$  the last inequality leads to a contradiction, so this case is impossible.  $\square$

**Remark 2.4.5** Theorem 2.2.2 can be extended to more general integral operators. More precisely, let  $j(u) = \int_{\mathbb{T}} G(\theta, u, u')$  for some  $G$  satisfying

- (i)  $G$  is a  $\mathcal{C}^2$  function,  $p \mapsto G(\theta, u, p)$  is even and  $G_{pp}(\theta, u_0, u_0') < 0$ ,  $\forall \theta \in \mathbb{T}$ ,
- (ii)  $G_\theta(\theta, a, p) = 0$  and  $G_u(\theta, a, 0) < 0$ , for all  $\theta \in \mathbb{T}$ ,
- (iii)  $G_u(\theta, u, p) \geq 0$  near  $(\theta, b, 0)$ , for all  $\theta \in \mathbb{T}$ ,

where  $u_0$  is a solution of problem (2.5). Then  $S_{u_0}$  is finite, i.e.  $\Omega_{u_0}$  is a polygon.

The proof of this results is very similar to the proof of Theorem 2.2.2, except for the analysis on the boundary  $\{u_0 = a\}$ , which requires certain particular estimations.

## 2.4.4 Proof of Theorem 2.2.3

Conditions of Theorem 2.2.1 are satisfied, so it's enough to prove :

**Proposition 2.4.2** Assume the conditions (i), (ii) of Theorem 2.2.3 hold. Then, for any solution  $u_0$  of (2.5), and for  $I = (\gamma_1, \gamma_2) \subset \{a < u_0 < b\}$ , there exists  $n_0 \in \mathbb{N}$  such that

$$u_0 + u_0'' = \sum_{1 \leq n \leq n_0} \alpha_n \delta_{\theta_n} \quad \text{in } I, \quad \alpha_n > 0.$$

**Proof.** The proof follows closely the one of Theorem 2.2.1. In fact the proof of steps (a) and (c) are identical, since we have  $G_{pp}(u_0, u'_0) \leq -K_{pp}(\alpha) < 0$  if  $u_0 \geq a + \alpha$ ,  $\alpha > 0$ . Let us deal with the step (b), which needs a new proof.

(b) Assume by contradiction that there exists  $\theta_0$  an accumulation point of  $S_{u_0} \cap I$  with  $u_0(\theta_0) = a$  (see Figure 2). Without restriction we may take  $\theta_0 = 0$  and assume there exists a decreasing sequence  $\{\theta_n > 0\}$  tending to 0 such that  $u''_0 + u_0 = \sum_{n \in \mathbb{N}} \alpha_n \delta_{\theta_n}$  and  $u_0 > a$  in  $\{0 < \theta \ll 1\}$  and  $\alpha_n > 0$ . Like in [88], we consider  $v_n \in H^1_0(\mathbb{T})$  given by

$$0 \leq v_n(\theta) = \begin{cases} \sin(\theta - \theta_{n+1}) \sin(\theta_{n-1} - \theta_n) & \text{in } (\theta_{n+1}, \theta_n), \\ \sin(\theta_n - \theta_{n+1}) \sin(\theta_{n-1} - \theta) & \text{in } (\theta_n, \theta_{n-1}), \\ 0, & \text{in } (\theta_{n+1}, \theta_{n-1})^c. \end{cases}$$

Since  $u''_0 + u_0$  has some Dirac mass at  $\{\theta_{n+1}, \theta_n, \theta_{n-1}\}$ , and  $u_0 > a$  in  $\{0 < \theta \ll 1\}$ , the function  $v_n$  is admissible for the first and second order necessary conditions of Proposition 2.3.2. From the first order condition we get

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{\mathbb{T}} G_u(u_0, u'_0) v_n + G_p(u_0, u'_0) v'_n \\ &= -[G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} + \int_{\mathbb{T} \setminus \theta_n} \left( G_u(u_0, u'_0) - \frac{d}{d\theta} G_p(u_0, u'_0) \right) v_n \\ &= -[G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} v_n(\theta_n) + \int_{\mathbb{T} \setminus \theta_n} \left( G_u(u_0, u'_0) + G_{pp}(u_0, u'_0) u_0 - G_{up}(u_0, u'_0) u'_0 \right) v_n, \end{aligned}$$

since  $u''_0 + u_0 = 0$  on  $(\theta_{n+1}, \theta_{n-1}) \setminus \{\theta_n\}$  ( $[\cdot]_{\theta}$  denotes the jump at  $\theta$ ).

We now prove the following consequence :

$$G_u(a, u'_0(0^+)) - G_{up}(a, u'_0(0^+)) u'_0(0^+) = 0. \quad (2.33)$$

We will prove (2.33) using the technique used in [88] for a particular functional  $G(u, p)$ . First we point out that

$$\begin{aligned} &\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_{\mathbb{T}} (G_u(u_0, u'_0) + G_{pp}(u_0, u'_0) u_0 - G_{up}(u_0, u'_0) u'_0) v_n}{\int_{\mathbb{T}} v_n} \\ &= G_u(a, u'_0(0^+)) - G_{up}(a, u'_0(0^+)) u'_0(0^+) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{[G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} v_n(\theta_n)}{\int_{\mathbb{T}} v_n} \leq 0, \end{aligned}$$

where we have used that fact that  $p \rightarrow G_p(u, p)$  is decreasing (consequence of  $G_{pp} \leq 0$ ),  $G_{pp}(a, p) = 0$  and  $[u'_0]_{\theta_n} > 0$ .

If by absurd (2.33) does not hold, there exists a constant  $c > 0$  such that

$$-\frac{[G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} v_n(\theta_n)}{\int_{\mathbb{T}} v_n} \geq c > 0 \quad (2.34)$$

for  $n$  large. Since  $G_{pp}(a, \cdot) = 0$  we have

$$\begin{aligned} [G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} &= G_p(u_0(\theta_n), u'_0(\theta_n^+)) - G_p(u_0(\theta_n), u'_0(\theta_n^-)) \\ &= [u'_0]_{\theta_n} G_{pp}(u_0(\theta_n), \tilde{u}'_{0n}) = [u'_0]_{\theta_n} (G_{pp}(u_0(\theta_n), \tilde{u}'_{0n}) - G_{pp}(u_0(0), \tilde{u}'_{0n})) \\ &= \theta_n [u'_0]_{\theta_n} \int_0^1 G_{upp}(u_0(t\theta_n), \tilde{u}'_{0n}) u'_0(t\theta_n) dt, \end{aligned}$$

with  $\tilde{u}'_{0n}$  between  $u'_0(\theta_n^+)$  and  $u'_0(\theta_n^-)$ . We point out that  $\frac{\int_{\mathbb{T}} v_n}{\theta_n v_n(\theta_n)} = \frac{1}{2} \frac{\tau_n + \tau_{n-1}}{\sum_{j=n}^{\infty} \tau_j} (1 + o(1))$  and

the series  $\sum_n \frac{\tau_n + \tau_{n-1}}{\sum_{j=n}^{\infty} \tau_j} = +\infty$ , where  $\tau_k = \theta_k - \theta_{k+1}$ , (from an elementary lemma on series, see [88]). Therefore, from (2.34) we obtain

$$-\frac{[G_p(u_0, u'_0)]_{\theta_n} v_n(\theta_n)}{\int_{\mathbb{T}} v_n} = -[u'_0]_{\theta_n} \left( \int_0^1 G_{upp}(u_0(t\theta_n), \tilde{u}'_{0n}) u'_0(t\theta_n) dt \right) \frac{\theta_n v_n(\theta_n)}{\int_{\mathbb{T}} v_n} \geq c.$$

As  $\int_0^1 G_{upp}(u_0(t\theta_n), \tilde{u}'_{0n})u'_0(t\theta_n)dt$  is uniformly bounded w.r.t. to  $n$ , with a summation, we get :

$$\begin{aligned} \infty > C \sum_n [u'_0]_{\theta_n} &\geq - \sum_n [u'_0]_{\theta_n} \left( \int_0^1 G_{upp}(u_0(t\theta_n), \tilde{u}'_{0n})u'_0(t\theta_n)dt \right) \\ &\geq \sum_n c \frac{\int_{\mathbb{T}} v_n}{\theta_n v_n(\theta_n)} \geq \sum_n \frac{c}{2} \frac{\tau_n + \tau_{n-1}}{\sum_{j=n}^{\infty} \tau_j} (1 + o(1)), \\ &= \infty. \end{aligned}$$

The contradiction proves (2.33). The important corollary of (2.33) is

$$u'_0(0^+) > 0, \quad G_{upp}(a, u'_0(0^+)) < 0. \quad (2.35)$$

Indeed, from (2.33) and (ii) it follows that  $0 \neq G_{up}(a, u'_0(0^+))u'_0(0^+) < 0$ . As  $u_0(0) \leq u_0(\theta)$  implies  $u_0^+(0) \geq 0$ , it follows that  $u'_0(0^+) > 0$  and  $G_{up}(a, u'_0(0^+)) < 0$ . Using once more (ii) gives

$$0 > G_u(a, u'_0(0^+)) = G_{up}(a, u'_0(0^+))u'_0(0^+) = z(a, u'_0(0^+))G_{upp}(a, u'_0(0^+)),$$

which proves (2.35).

Using  $v_n$  in the second order condition of Proposition 2.3.2 gives

$$\begin{aligned} 0 &\leq \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} G_{uu}(u_0, u'_0)v_n^2 + G_{up}(u_0, u'_0)(v_n^2)' + G_{pp}(u_0, u'_0)|v'_n|^2 \\ &= -[G_{up}(u_0, u'_0)]_{\theta_n} v_n(\theta_n)^2 \\ &\quad + \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} [G_{uu}(u_0, u'_0) - G_{uup}(u_0, u'_0)u'_0 + G_{upp}(u_0, u'_0)u_0] v_n^2 + G_{pp}(u_0, u'_0)|v'_n|^2 \\ &\sim o(1)\tau_n^2\tau_{n-1}^2 + \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} G_{pp}(u_0, u'_0)|v'_n|^2. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Since  $G_{pp}(a, 0) = 0$ , we need further developments allowing to use (2.35). Namely

$$\begin{aligned} G_{pp}(u_0, u'_0) &= G_{upp}(a, u'_0)u'_0(0^+)\theta(1 + o(1)), \\ \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} G_{pp}(u_0, u'_0)|v'_n|^2 &= \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} G_{upp}(a, u'_0)u'_0(0^+)\theta|v'_n|^2(1 + o(1)) \\ &= u'_0(0^+)G_{upp}(a, u'_0(0^+)) \int_{\theta_{n+1}}^{\theta_{n-1}} \theta|v'_n|^2(1 + o(1)) \\ &\sim u'_0(0^+)G_{upp}(a, u'_0(0^+))(\tau_n^2\tau_{n-1}^2 + \theta_{n+1}\tau_n\tau_{n-1}^2 + \theta_n\tau_n^2\tau_{n-1}). \end{aligned}$$

From (2.35), the last inequality contradicts the second order condition (2.36) and proves that this case is impossible.  $\square$

**Proposition 2.4.3** *Under the assumptions of Theorem 2.2.3 the sets  $\{u_0 = a\}$  and  $\{u_0 = b\}$  are finite.*

**Proof.** The proof of proposition follows closely the proof of Proposition 2.4.1, except for the case (a.1) which needs another proof as  $G_{pp}(u, p)$  is not strictly negative near  $u = a$ . Note that the case (a.2) of Proposition 2.4.1 when using only condition (ii.1) (which is the case in this proposition) does not require  $G_{pp} < 0$  (but only  $G_u(a, 0) < 0$  and the parity of  $p \rightarrow G(a, p)$ ). Furthermore, the case (b) of Proposition 2.4.1 requires only the (even) parity of  $p \rightarrow G(u, p)$ ,  $G_{pp}(u, p) < 0$  and  $G_u \leq 0$  near  $(b, 0)$ .

**(a.1)** We assume by contradiction that 0 is an accumulation point of  $S_{u_0} \cap \{u_0 = a\}$ , and that there exists a sequence  $\{\varepsilon_n > 0\}$  tending to 0, with  $u_0(\varepsilon_n) = a$  and  $S_{u_0} \cap (0, \varepsilon_n) \cap \{a < u_0 < b\} \neq \emptyset$  (see Figure 3). Then, there exists an open interval  $\omega_n \subset (0, \varepsilon_n) \cap \{a < u_0 < b\}$ , with  $S_{u_0} \cap \omega_n \neq \emptyset$

and  $u_0(\partial\omega_n) = a$ . From Theorem 2.2.1 it follows that  $S_{u_0} \cap \omega_n$  is finite. Therefore, we can denote  $\omega_n = (\theta_{n+1}, \theta_{n-1})$  and find  $\theta_n \in (\theta_{n+1}, \theta_{n-1}) \cap S_{u_0}$ . We then consider

$$0 \leq v_n(\theta) = \begin{cases} \sin(\theta - \theta_{n+1}) \sin(\theta_{n-1} - \theta_n) & \text{in } (\theta_{n+1}, \theta_n), \\ \sin(\theta_n - \theta_{n+1}) \sin(\theta_{n-1} - \theta) & \text{in } (\theta_n, \theta_{n-1}), \\ 0, & \text{in } (\theta_{n+1}, \theta_{n-1})^c. \end{cases}$$

The function  $v_n$  is admissible for the first order condition, since  $u_0'' + u_0$  has some positive Dirac mass on  $\partial\omega_n$ . We can proceed exactly as in step (b) of Proposition 2.4.2 and we prove that (2.35) holds, so  $u_0'(0^+) > 0$ . However, from the fact that  $\theta_0 = 0$  is an accumulation point from the right, it's easy to show that  $u_0'(0^+) = 0$ . The contradiction proves the claim.  $\square$

## 2.5 Sharpness of conditions

The conditions of Theorem 2.2.2, 2.2.3 are optimal in the sense that there exist counterexamples with  $G(u, u')$  not satisfying one of (i)-(iii) and such that the corresponding solution of (2.5) is not a polygon. We will provide some counterexamples for Theorems 2.2.2, 2.2.3.

### 2.5.1 Counterexamples for Theorem 2.2.2

#### Condition (i)

Set  $c = (a + b)/2$  and consider  $G(u, p) = \frac{1}{2}((u - c)^2 + p^2)$ . Note that  $G$  satisfies (ii.1) as  $G_u(a, 0) = a - c < 0$  and (iii) because  $G_u(b, 0) = b - c > 0$ . It does not satisfy (i) because  $G_{pp} = 1$ . It is obvious that the corresponding solution of (2.5) is not a polygon, but rather the circle  $\{u_0 = c\}$ .

#### Condition (ii)

Consider the function  $G(u, p) = \frac{1}{2}(u^2 - p^2)$ . Of course  $G_u(u, p) = u$  and  $G_{pp}(u, p) = -2$ , so  $G(u, p)$  satisfies the conditions (i) and (iii), but it does not satisfy (ii.1), neither (ii.2). The solution of (2.5) corresponding to this  $G(u, p)$  is the circle  $u_0 = a$ . Indeed, for admissible  $u$  we have

$$j(u) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u^2 - |u'|^2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{T}} (u + u'')u \geq \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} (u + u'') = \frac{a}{2} \int_{\mathbb{T}} u \geq \pi a^2 = j(u_0)$$

which proves that  $u_0 \equiv a$  is the minimizer of  $j(u)$ .

Another counterexample is using the perimeter. Indeed, if  $G(u, p) = -\frac{(u^2 + p^2)^{1/2}}{u^2}$  then  $j(u) := \int_{\mathbb{T}} G(u, u') d\theta = -P(u)$ , where  $P(u)$  is the perimeter of the domain inside the curve  $\{(1/u(\theta), \theta), \theta \in \mathbb{T}\}$ . Therefore, solution of (2.5) is  $u_0 \equiv a$ , which corresponds to the circle  $\{r = 1/a\}$ . On the other side,  $G(u, p)$  satisfies the conditions (i) and (iii) but none of conditions (ii). Indeed,

$$G_u(u, 0) = \frac{1}{u^2}, \quad G_{pp}(u, p) = -\frac{1}{(u^2 + p^2)^{3/2}}.$$

#### Condition (iii)

Set  $G(u, p) = -\frac{1}{2}(u^2 + p^2)$ . Since  $G_u = -u$  and  $G_{pp} = -2$ ,  $G(u, p)$  satisfies (i), (ii.1), but it does not satisfy (iii). A solution of the corresponding minimization problem is  $u_0 \equiv b$ . In fact, any  $u_0$  representing a convex polygon with edges tangent to the circle  $\{u_0 = b\}$  is a solution! We can also add some piece of circle in the boundary. Indeed, first let  $v$  be a function such that  $1/v$  represents a straight line with  $v \leq b$ . For such  $v$ , we have

$$v^2 + |v'|^2 \leq b^2,$$

because  $v$  satisfies the equation  $v + v'' = 0$ , so  $((v^2) + (v')^2)' = 0$  and therefore  $v^2 + |v'|^2 = k^2$ . For  $\theta_0$  such that  $v'(\theta_0) = 0$  the value of  $1/v(\theta_0)$  gives the distance of the origin from the line  $v$ , so we must have  $1/v(\theta_0) \geq 1/b$ , which proves the claim.

Now, every admissible  $u$  can be approached for the  $H^1(\mathbb{T})$  norm by a sequence of convex polygons  $u_n$  satisfying  $a \leq u_n \leq b$ . Then

$$j(u) = \lim_{n \rightarrow \infty} j(u_n) = -\frac{1}{2} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{T}} (u_n^2 + |u_n'|)^2 \geq -\pi b^2 = j(u_0),$$

which proves that  $u_0 \equiv b$  is a minimizer. This example provides some optimal shapes having an infinite number of corners inside  $\{a < u < b\}$  (because we can have an infinite number of edges, tangent to the circle of radius  $1/b$ ).

### 2.5.2 Counterexamples for Theorem 2.2.3

With minor modifications, the counterexamples given in (i), (ii) and (iii) above can easily be updated for Theorem 2.2.3.

**Condition (i)** Let  $c = \frac{1}{2}(a + b)$  and  $G(u, p) = \frac{1}{2}((u - c)^2 + (u - a)^2 p^2)$ . The function  $G$  satisfies the (ii), (iii) of Theorem 2.2.3. Indeed,

$$\begin{aligned} (ii) : \quad & G_u(a, p) = a - c < 0, \\ & pG_{up}(a, p) = 0, \quad G_{upp}(a, p) = 0, \text{ so } pG_{up}(a, 0) = z(p)G_{upp}(a, p) \text{ with } z = 0. \\ (iii) : \quad & G_u(b, 0) = b - c > 0. \end{aligned}$$

The condition (i) is not satisfied as  $G_{pp} = 2(u - a)^2$  (note that  $G_{pp}(a, p) = 0$ ). For  $u$  admissible we have

$$j(u) \geq 0 = j(c),$$

so  $u_0 \equiv c$  minimizes  $j(u)$ .

**Condition (ii)** Let  $G(u, p)$  and  $j(u)$  be as in the first example of Condition (ii) of Section 2.5.1. We consider

$$\widehat{G}(u, p) = \frac{1}{2}(u^2 - \varphi(u)p^2), \quad 0 \leq \varphi \leq 1, \quad \varphi \in C^\infty(\mathbb{R}), \quad \varphi(u) = \begin{cases} 0, & u \leq a, \\ 1, & u \geq b. \end{cases}$$

and let  $\widehat{j}(u) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{G}(u, u')$ . The function  $\widehat{G}$  satisfies the (i), (iii) of Theorem 2.2.3, but not (ii). For  $u$  admissible we have

$$\widehat{j}(u) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{G}(u, u') \geq \int_T G(u, u') = j(u) \geq j(a) = \widehat{j}(a),$$

so  $u_0 \equiv a$  minimizes  $\widehat{j}(u)$ .

**Condition (iii)** Again, let  $G(u, p)$  and  $j(u)$  be as in the Condition (iii) of Section 2.5.1. We consider  $\widehat{G}(u, p) = -\frac{1}{2}(u^2 + \varphi(u)p^2)$  and  $\widehat{j}(u) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{G}(u, u')$ . The function  $\widehat{G}$  satisfies the (i), (ii) of Theorem 2.2.3, but not (iii). Similarly as above, for  $u$  admissible we have

$$\widehat{j}(u) = \int_{\mathbb{T}} \widehat{G}(u, u') \geq \int_T G(u, u') = j(u) \geq j(b) = \widehat{j}(b),$$

so  $u_0 \equiv b$  minimizes  $\widehat{j}(u)$ . Same remarks as in the previous subsection can be done. We can construct some optimal shapes locally polygonal inside  $\{a < u < b\}$  (necessary because of Proposition 2.4.2), but having an infinite number of corners in  $\{a < u < b\}$  (the only condition to be a minimizer is that every edges of these shapes are tangent to the circle of radius  $1/b$ , and inside the domain  $\{\varphi = 1\}$ ).

## Chapitre 3

# Optimisation de forme pour les valeurs propres

Dans ce chapitre, on s'intéresse à quelques résultats de régularité pour des problèmes d'optimisation de forme sur les fonctions valeurs propres de l'opérateur laplacien avec condition de Dirichlet homogènes. On réfère, pour une étude approfondie des problèmes d'optimisation de forme sur les valeurs propres, au livre [70] qui réunit la plupart des résultats actuels connus, et recense aussi les problèmes encore ouverts sur le sujet.

Pour la clarté de l'exposé, on rappelle cependant quelques propriétés importantes des fonctions valeurs propres dans le premier paragraphe de ce chapitre. On s'intéresse ensuite, au second paragraphe, à la régularité des frontières libres pour la minimisation de la première valeur propre du laplacien sous contrainte de volume et d'inclusion dans une boîte. Ce travail, semblable à [19], consiste à nous ramener aux résultats de régularité de [5]. Après cela, on considère un problème d'optimisation de forme sur la seconde valeur propre avec contrainte de volume, mais en rajoutant aussi une contrainte de convexité des formes admissibles (bi-dimensionnelles), comme au chapitre 2 de cette thèse ; ce problème a été étudié par A. Henrot et E. Oudet (voir [72]). On reprend et on généralise donc au paragraphe 3.3 les résultats de [72], en étant particulièrement attentifs à l'analyse de la régularité de la forme optimale, et à la difficulté de traiter la contrainte de convexité. Nous montrons en particulier que la régularité est au plus  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ , et non  $\mathcal{C}^{1,1}$  comme on pourrait le penser au premier abord, en analogie avec le *stade* (voir paragraphe 3.3).

On adapte ensuite cette approche pour revenir sur le problème de la minimisation de  $\lambda_1$  dans une boîte, avec quelques résultats dans le cas particulier où  $D \subset \mathbb{R}^2$  est une bande infinie. On termine avec des illustrations numériques de nos résultats.

### 3.1 Définitions et résultats généraux

Rappelons la définition de la notion de valeur propre : si  $\Omega$  est un ouvert borné (ou plus généralement de mesure finie), on peut définir l'opérateur

$$\begin{array}{ccc} & \xrightarrow{(-\Delta)^{-1}} & \\ L^2(\Omega) & \longrightarrow H_0^1(\Omega) \hookrightarrow & L^2(\Omega) \\ f & \longmapsto & u_\Omega \end{array}$$

où  $u_\Omega$  est la solution variationnelle de

$$\left\{ \begin{array}{lll} -\Delta u & = & f \quad \text{dans } \Omega \\ u & = & 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. \quad \text{i.e.} \quad \left\{ \begin{array}{l} \forall v \in H_0^1(\Omega), \quad \int_{\Omega} \nabla u_\Omega \nabla v = \int_{\Omega} f v \\ u_\Omega \in H_0^1(\Omega) \end{array} \right. \quad (3.1)$$

Cet opérateur est compact (d'après le théorème de Rellich qui établit la compacité de l'injection de  $H_0^1(\Omega)$  dans  $L^2(\Omega)$ ). D'après les résultats de théorie spectrale sur les opérateurs compacts, on

peut poser

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \lambda_3(\Omega) \leq \dots$$

les inverses des valeurs propres de cet opérateur compact positif (avec répétition en cas de valeur propre multiple). Pour  $k \in \mathbb{N}^*$ , on a ainsi l'existence d'une fonction  $u_k \in H_0^1(\Omega)$  (appelée fonction propre du laplacien) telle que

$$\begin{cases} -\Delta u_k &= \lambda_k(\Omega) u_k, \text{ dans } \Omega \\ u_k &\in H_0^1(\Omega). \end{cases}$$

On peut alors considérer les problèmes du type

$$\min_{\Omega} \lambda_k(\Omega)$$

où  $k \in \mathbb{N}^*$  est fixé, et  $\Omega$  parcourt une classe de domaines de  $\mathbb{R}^d$ , par exemple les ensembles de volume donné.

Rappelons quelques propriétés classiques :

**Proposition 3.1** *Si  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\Omega_1 \subset \Omega_2$ , alors*

$$\lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2),$$

*c'est-à-dire que  $\lambda_k$  est décroissante pour l'inclusion.*

*Si  $x \in \mathbb{R}^d$  et  $t \in \mathbb{R}_+$ , alors*

$$\lambda_k(\Omega + x) = \lambda_k(\Omega), \quad \lambda_k(t\Omega) = \frac{\lambda_k(\Omega)}{t^2}.$$

On aura besoin, plus précisément, de la stricte croissance de  $\lambda_1$  pour l'inclusion. Nous énonçons ce résultat dans le lemme qui suit :

**Lemme 3.1** *Soit  $\omega, \Omega \subset \mathbb{R}^d$  des ouverts avec  $\omega \subset \Omega$ ,  $\text{cap}(\Omega \setminus \omega) > 0$ ,  $\Omega$  connexe.*

$$\text{Alors, } \lambda_1(\omega) > \lambda_1(\Omega).$$

**Preuve :** Soit  $\omega \subset \Omega \subset \mathbb{R}^d$  deux ouverts avec  $\Omega$  connexe. On sait que  $\lambda_1(\Omega) \leq \lambda_1(\omega)$ . S'il y a égalité, c'est que la fonction propre  $u_\omega$  est aussi fonction propre sur  $\Omega$ , puisqu'elle appartient à  $H_0^1(\Omega)$  et réalise alors le minimum dans la caractérisation variationnelle de  $\lambda_1(\Omega)$  :

$$\lambda_1(\Omega) = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla v|^2; v \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} v^2 = 1 \right\}.$$

On a donc  $-\Delta u_\omega = \lambda_1(\Omega) u_\omega$  sur  $\Omega$  (en écrivant comme d'habitude que, pour tout  $v \in C_c^\infty(\Omega)$ , la dérivée en  $t = 0$  de

$$t \rightarrow \int_{\Omega} \frac{|\nabla(u_\omega + tv)|^2}{\int_{\Omega} (u_\omega + tv)^2},$$

est nulle). Comme  $u_\omega \geq 0$ , on a donc  $-\Delta u_\omega \geq 0$  sur  $\Omega$ . Puisque  $\Omega$  est connexe, par principe strict du maximum, on a  $u_\omega > 0$  sur  $\Omega$  et donc  $\Omega \subset [u_\omega > 0] \subset \omega$ , la dernière inclusion étant vraie à un ensemble de capacité nulle près, i.e.  $\text{cap}([u_\omega > 0] \setminus \omega) = 0$ . Ainsi on a nécessairement  $\text{cap}(\Omega \setminus \omega) = 0$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

On est amené, pour résoudre la question de l'existence d'une forme optimale, à généraliser la définition des valeurs propres à un ensemble  $\Omega$  quasi-ouvert (ou seulement mesurable) et de mesure finie, avec la généralisation suivante de  $H_0^1(\Omega)$  :

$$H_0^1(\Omega) := \{v \in H^1(\mathbb{R}^d) / v = 0 \text{ quasi-partout en dehors de } \Omega\}.$$

Les fonctions et valeurs propres sont alors définies selon la formulation variationnelle (3.1).

Ainsi, on a le résultat général d'existence suivant ([29]) :

**Théorème 3.1 (Buttazzo, Dal Maso)** *Soit un entier  $p$ , un réel  $V_0 > 0$ , une boîte  $D$  bornée, et  $\Phi : \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R}$  satisfaisant :*

- $\Phi$  est semi-continue inférieurement,
- $\Phi$  est croissante selon chaque coordonnée.

*Alors il existe un quasi-ouvert  $\Omega^*$  solution du problème*

$$\min_{|\Omega|=V_0, \Omega \subset D} \Phi(\lambda_1(\Omega), \lambda_2(\Omega), \dots, \lambda_p(\Omega)).$$

Voir aussi [26] pour un résultat général d'existence, faisant intervenir les deux premières valeurs propres.

**Remarque 3.1** Dans le cas où  $D$  n'est pas borné, par exemple  $D = \mathbb{R}^d$ , il faut gérer le défaut de compacité de l'injection de  $H^1(\mathbb{R}^d)$  dans  $L^2(\mathbb{R}^d)$  par le principe de concentration-compacité introduit par P.-L. Lions ([98]). D. Bucur utilise ce principe dans [22, 23] et résout le problème de l'existence, au moins pour des fonctionnelles faisant intervenir les deux premières valeurs propres. Le cas de la troisième valeur propre est traité dans [27] avec le même type d'arguments.

Bien sûr, encore une fois, la solution obtenue par ce théorème d'existence a une régularité a priori très faible. Or on s'attend à ce que l'optimalité fournisse de la régularité. Les seuls résultats qui étaient connus concernent les cas où on peut déterminer explicitement la solution du problème (minimisation de  $\lambda_1$  ou de  $\lambda_2$  par exemple, voir paragraphe 3.2 et le début du paragraphe 3.3).

## 3.2 Minimisation de $\lambda_1$ : régularité à l'intérieur de la boîte

Ce paragraphe est la reproduction de l'article *Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the Laplacian with volume and inclusion constraints* en coécriture avec Tanguy Briançon<sup>1</sup>, accepté pour publication en juillet 2008, publié dans **Annales de l'IHP, Analyse non linéaire**, voir [17].

### Abstract

We consider the well-known following shape optimization problem :

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\substack{|\Omega|=a \\ \Omega \subset D}} \lambda_1(\Omega),$$

where  $\lambda_1$  denotes the first eigenvalue of the Laplace operator with homogeneous Dirichlet boundary condition, and  $D$  is an open bounded set (a box). It is well-known that the solution of this problem is the ball of volume  $a$  if such a ball exists in the box  $D$  (Faber-Krahn's theorem). In this paper, we prove regularity properties of the boundary of the optimal shapes  $\Omega^*$  in any case and in any dimension. Full regularity is obtained in dimension 2.

*Keywords* : Shape optimization, eigenvalues of the Laplace operator, regularity of free boundaries.

### 3.2.1 Introduction and main results

Let  $D$  be a bounded open subset of  $\mathbb{R}^d$ . For all open subset  $\Omega$  of  $D$ , we denote by  $\lambda_1(\Omega)$  the first eigenvalue of the Laplace operator in  $\Omega$ , with homogeneous boundary conditions, and by  $u_\Omega$  a normalized eigenfunction, that is

$$\begin{cases} -\Delta u_\Omega &= \lambda_1(\Omega) u_\Omega & \text{in } \Omega, \\ u_\Omega &= 0 & \text{on } \partial\Omega, \\ \int_\Omega u_\Omega^2 &= 1. \end{cases}$$

We are interested here in the regularity of the optimal shapes of the following shape optimization problem, where  $a \in (0, |D|)$  ( $|D|$  denotes the Lebesgue measure of  $D$ ) :

$$\begin{cases} \Omega^* \text{ open, } \Omega^* \subset D, |\Omega^*| = a, \\ \lambda_1(\Omega^*) = \min\{\lambda_1(\Omega); \Omega^* \text{ open, } \Omega \subset D, |\Omega| = a\}. \end{cases} \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Lycée Agora, 92800 Puteaux, France, briancon\_tanguy@yahoo.fr



By a well-known theorem of Faber and Krahn, if there is a ball  $B \subset D$  with  $|B| = a$ , then this ball is an optimal shape and it is unique, up to translations (and up to sets of zero capacity).

Here we address the question of existence of a **regular** optimal set in all cases.

Existence of a *quasi-open* optimal set  $\Omega^*$  may be deduced from a general existence result by G. Buttazzo and G. Dal Maso (see [29]) for an extended version of (3.2), where the variable sets  $\Omega$  are not necessarily open. An optimal shape  $\Omega^*$  may not be more than a quasi-open set if  $D$  is not connected (we reproduce in the appendix the example mentioned in [20]). On the other hand, it is proved in [20] or [68] that such an open optimal set  $\Omega^*$  always exists for (3.2) and, if moreover  $D$  is connected, then all optimal shapes  $\Omega^*$  are open. More precisely, it is proved in [20] that, for any  $D$ ,  $u_{\Omega^*}$  is locally Lipschitz continuous in  $D$ . If moreover  $D$  is connected, then  $\Omega^*$  coincides with the support of  $u_{\Omega^*}$  (and is therefore open). Let us summarize this as follows (see also [131]) :

**Proposition 3.2.1** *Assume  $D$  is open and bounded. The problem (3.2) has a solution  $\Omega^*$ , and  $u_{\Omega^*}$  is nonnegative and locally Lipschitz continuous in  $D$ . If  $D$  is connected,  $\Omega^* = \{x \in D, u_{\Omega^*} > 0\}$ . Moreover, we have*

$$\Delta u_{\Omega^*} + \lambda_1(\Omega^*)u_{\Omega^*} \geq 0 \text{ in } D, \quad (3.3)$$

which means that  $\Delta u_{\Omega^*} + \lambda_1(\Omega^*)u_{\Omega^*}$  is a positive Radon measure.

Here, we are interested in the regularity of  $\partial\Omega^*$  itself, and we prove the following theorem :

**Theorem 3.2.1** *Assume  $D$  is open, bounded and connected. Then any solution of (3.2) satisfies :*

1.  $\Omega^*$  has locally finite perimeter in  $D$  and

$$\mathcal{H}^{d-1}((\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*) \cap D) = 0, \quad (3.4)$$

where  $\mathcal{H}^{d-1}$  is the Hausdorff measure of dimension  $d-1$ , and  $\partial^*\Omega^*$  is the reduced boundary (in the sense of sets with finite perimeter, see [53] or [60]).

2. There exists  $\Lambda > 0$  such that

$$\Delta u_{\Omega^*} + \lambda_1(\Omega^*)u_{\Omega^*} = \sqrt{\Lambda}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega^*,$$

in the sense of distribution in  $D$ , where  $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega^*$  is the restriction of the  $(d-1)$ -Hausdorff measure to  $\partial\Omega^*$ .

3.  $\partial^*\Omega^*$  is an analytic hypersurface in  $D$ .
4. If  $d = 2$ , then the whole boundary  $\partial\Omega^* \cap D$  is analytic.

We use the same strategy as in [19] (where the regularity is studied for another shape optimization problem). Theorem 3.2.1 essentially relies on the proof of the equivalence of (3.2) with a penalized version for the constraint  $|\Omega| = a$ , as stated in Theorem 3.2.2 below. Once we have this penalized version, we can use techniques and results from [5] (see also [66] and [19]).

**Remark 3.2.1** According to the results in [5], the third point in Theorem 3.2.1 is a direct consequence of the second one which says that  $u_{\Omega^*}$  is a “weak solution” in the sense of [5]. To obtain the full regularity of the boundary for  $d = 2$ , the fact that  $u_{\Omega^*}$  is a weak solution is not sufficient, and more information has to be deduced from the variational problem. The approach is essentially the same as in Theorem 6.6 and Corollary 6.7 in [5]. The necessary adjustments are given at the end of this paper.

**Remark 3.2.2** According to the result of [133, 134, 31, 49], it is likely that full regularity of the boundary may be extended to higher dimension ( $d \leq 6$ ?), and therefore that the estimate (3.4) can be improved.

But this needs quite more work and is under study.

By a classical variational principle, we know that, for all  $\Omega \subset D$  open,

$$\lambda_1(\Omega) = \int_{\Omega} |\nabla u_{\Omega}|^2 = \min \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u|^2, u \in H_0^1(\Omega), \int_{\Omega} u^2 = 1 \right\}. \quad (3.5)$$

Here,  $\lambda_1(\Omega^*) \leq \lambda_1(\Omega)$  for all open set  $\Omega \subset D$  with  $|\Omega| = a$ . Since  $[\Omega \subset \tilde{\Omega} \Rightarrow \lambda_1(\Omega) \geq \lambda_1(\tilde{\Omega})]$ , it follows that  $\lambda_1(\Omega^*) \leq \lambda_1(\Omega)$  for all open set  $\Omega \subset D$  with  $|\Omega| \leq a$ . Coupled with (3.5), this leads to the following variation property of  $\Omega^*$  and  $u_{\Omega^*}$  (see [20] for more details), where we denote  $u = u_{\Omega^*}$ ,  $\lambda_a = \lambda_1(\Omega^*)$ , and  $\Omega_v = \{x \in D; v(x) \neq 0\}$  :

$$\lambda_a = \int_D |\nabla u|^2 = \min \left\{ \int_D |\nabla v|^2; v \in H_0^1(D), \int_D v^2 = 1, |\Omega_v| \leq a \right\}. \quad (3.6)$$

Let us rewrite this as follows. For  $w \in H_0^1(D)$ , we denote  $J(w) = \int_D |\nabla w|^2 - \lambda_a \int_D w^2$ . Then applying (3.6) with  $v = w/(\int_D w^2)^{1/2}$ , we obtain that  $u$  is a solution of the following optimization problem :

$$J(u) \leq J(w), \text{ for all } w \in H_0^1(D), \text{ with } |\Omega_w| \leq a. \quad (3.7)$$

One of the main ingredient in the proof of Theorem 3.2.1 is to improve the variational property (3.7) in two directions, as stated in Theorem 3.2.2 below. The approach is local.

Let  $B_R$  be a ball included in  $D$  and centered on  $\partial\Omega_u \cap D$ . We define

$$\mathcal{F} = \{v \in H_0^1(D), u - v \in H_0^1(B_R)\}.$$

For  $h > 0$ , we denote by  $\mu_-(h)$  the biggest  $\mu_- \geq 0$  such that,

$$\forall v \in \mathcal{F} \text{ such that } a - h \leq |\Omega_v| \leq a, J(u) + \mu_- |\Omega_u| \leq J(v) + \mu_- |\Omega_v|. \quad (3.8)$$

We also define  $\mu_+(h)$  as the smallest  $\mu_+ \geq 0$  such that,

$$\forall v \in \mathcal{F} \text{ such that } a \leq |\Omega_v| \leq a + h, J(u) + \mu_+ |\Omega_u| \leq J(v) + \mu_+ |\Omega_v|. \quad (3.9)$$

The following theorem is a main step in the proof of Theorem 3.2.1 :

**Theorem 3.2.2** *Let  $u, B_R$  and  $\mathcal{F}$  as above. Then for  $R$  small enough (depending only on  $u, a$  and  $D$ ), there exists  $\Lambda > 0$  and  $h_0 > 0$  such that,*

$$\forall h \in (0, h_0), 0 < \mu_-(h) \leq \Lambda \leq \mu_+(h) < +\infty,$$

and, moreover,

$$\lim_{h \rightarrow 0} \mu_+(h) = \lim_{h \rightarrow 0} \mu_-(h) = \Lambda. \quad (3.10)$$

**Remark 3.2.3** We can compare the existence of  $\mu_+(h)$  with Theorem 2.9 in [20]. This theorem shows that there exists  $\mu_+$  such that

$$\int_D |\nabla u|^2 \leq \int_D |\nabla v|^2 + \lambda_a \left[ 1 - \int_D v^2 \right]^+ + \mu_+ (|\Omega_v| - a),$$

for  $v \in H_0^1(D)$  and  $|\Omega_v| \geq a$ . The difference with [20] is that, in (3.9), we have the term  $\lambda_a [1 - \int_D v^2]$  (not only the positive part), but we allowed only perturbations in  $B_R$ . We cannot expect to have something like (3.9) for perturbations in all  $D$  (because we may find  $v$  with  $|\Omega_v| > a$  and  $J(v) < 0$ , so  $\lim_{t \rightarrow +\infty} J(tv) = -\infty$ ).

In the next section, we will prove Theorem 3.2.2. In the third section, we will prove Theorem 3.2.1. In the appendix, we discuss the case  $D$  non-connected.

### 3.2.2 Proof of Theorem 3.2.2

In the next lemma, we give an Euler-Lagrange equation for our problem. The proof follows the steps of the Euler-Lagrange equation in [41].

**Lemma 3.2.1 (Euler-Lagrange equation)** *Let  $u$  be a solution of (3.7). Then there exists  $\Lambda \geq 0$  such that, for all  $\Phi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$ ,*

$$\int_D 2(D\Phi \nabla u, \nabla u) - \int_D |\nabla u|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D u^2 \nabla \cdot \Phi = \Lambda \int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi.$$

**Proof.** We start by a general remark that will be useful in the rest of the paper. If  $v \in H_0^1(D)$  and if  $\Phi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$ , we define  $v_t(x) = v(x + t\Phi(x))$ ; therefore, for  $t$  small enough,  $v_t \in H_0^1(D)$ . A simple calculus gives (when  $t$  goes to 0),

$$|\Omega_{v_t}| = |\Omega_v| - t \int_{\Omega_v} \nabla \cdot \Phi + o(t),$$

$$J(v_t) = J(v) + t \left( \int_D 2(D\Phi \nabla v, \nabla v) - \int_D |\nabla v|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v^2 \nabla \cdot \Phi \right) + o(t).$$

Now we apply this with  $v = u$  and  $\Phi$  such that  $\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi > 0$ . Such a  $\Phi$  exists, otherwise we would get, using that  $D$  is connected,  $\Omega_u = D$  or  $\emptyset$  a.e. We have  $|\Omega_{u_t}| < |\Omega_u|$  for  $t > 0$  small enough and, by minimality,

$$\begin{aligned} J(u) &\leq J(u_t) \\ &= J(u) + t \left( \int_D 2(D\Phi \nabla u, \nabla u) - \int_D |\nabla u|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D u^2 \nabla \cdot \Phi \right) + o(t), \end{aligned}$$

and so,

$$\int_D 2(D\Phi \nabla u, \nabla u) - \int_D |\nabla u|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D u^2 \nabla \cdot \Phi \geq 0. \quad (3.11)$$

Now, we take  $\Phi$  with  $\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi = 0$ . Let  $\Phi_1$  be such that  $\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi_1 = 1$ . Writing (3.11) with  $\Phi + \eta \Phi_1$  and letting  $\eta$  goes to 0, we get (3.11) with this  $\Phi$  and, using  $-\Phi$ , we get (3.11) with an equality instead of the inequality. For a general  $\Phi$ , we use this equality with  $\Phi - \Phi_1(\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi)$  (we have  $\int_{\Omega_u} \nabla \cdot (\Phi - \Phi_1(\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi)) = 0$ ), and we get the result with

$$\Lambda = \int_D 2(D\Phi_1 \nabla u, \nabla u) - \int_D |\nabla u|^2 \nabla \cdot \Phi_1 + \lambda_a \int_D u^2 \nabla \cdot \Phi_1 \geq 0,$$

using (3.11). □

**Remark 3.2.4** We will have to prove that, in fact,  $\Lambda > 0$ .

Let us remind our notations : let  $u$  be a solution of (3.7), and let  $B_R$  be a ball included in  $D$  and centered on  $\partial\Omega_u \cap D$ . We define

$$\mathcal{F} = \{v \in H_0^1(D), u - v \in H_0^1(B_R)\}.$$

Before proving Theorem 3.2.2, we give the following useful lemma :

**Lemma 3.2.2** *Let  $u, B_R$  and  $\mathcal{F}$  as above. Then there exists a constant  $C$  such that, for  $R$  small enough,*

$$\forall v \in \mathcal{F}, \quad J(v) \geq \frac{1}{2} \int_{B_R} |\nabla v|^2 - C.$$

**Proof.** We know that  $\lambda_1(B_R) = \lambda_1(B_1)/(R^2)$  (we just use the change of variable  $x \rightarrow x/R$ ). If  $R$  is small enough we have :

$$\lambda_1(B_R) \geq 1, \quad \frac{4\lambda_a}{\lambda_1(B_R)} \leq 1/2. \quad (3.12)$$

Let  $v \in \mathcal{F}$ ; so  $u - v \in H_0^1(B_R)$ , and using the variational formulation of  $\lambda_1(B_R)$ , we get

$$\|u - v\|_{L^2(B_R)}^2 \leq \frac{\|\nabla(u - v)\|_{L^2(B_R)}^2}{\lambda_1(B_R)}.$$

We deduce that,

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(B_R)}^2 &\leq 2 \frac{\|\nabla(u - v)\|_{L^2(B_R)}^2}{\lambda_1(B_R)} + 2\|u\|_{L^2(B_R)}^2 \\ &\leq 4 \frac{\|\nabla v\|_{L^2(B_R)}^2}{\lambda_1(B_R)} + \frac{C}{\lambda_a}, \end{aligned}$$

(we use (3.12)) where  $C$  depends only on the  $L^2$  norms of  $u$  and his gradient. Now we have

$$J(v) \geq \int_D |\nabla v|^2 - \lambda_a \left( 4 \frac{\|\nabla v\|_{L^2(B_R)}^2}{\lambda_1(B_R)} + \frac{C}{\lambda_a} \right),$$

and we get the result using (3.12).  $\square$

**Remark 3.2.5** This lemma is interesting for two reasons. The first one is that  $J$  is bounded from below on  $\mathcal{F}$ . The second one is that, if  $v_n \in \mathcal{F}$  is a sequence such that  $J(v_n)$  is bounded, then  $\|\nabla v_n\|_{L^2(B_R)}$  is also bounded. Since  $v_n = u$  outside  $B_R$  we deduce that  $v_n$  is bounded in  $H_0^1(D)$  (and so weakly converges up to a sub-sequence...).

**Proof of Theorem 3.2.2 :** We divide our proof into four parts. Let  $\Lambda \geq 0$  be as in Lemma 3.2.1.

**First part :**  $\Lambda \leq \mu_+(h) < +\infty$ .

We start the proof by showing that  $\mu_+(h)$  is finite. Since  $B_R$  is centered on the boundary on  $\partial\Omega_u$ , we first show :

$$0 < |\Omega_u \cap B_R| < |B_R|.$$

The first inequality comes from the fact that  $\Omega_u$  is open. The second one comes from the following lemma :

**Lemma 3.2.3** *Let  $\omega$  be an open subset of  $D$ , and let  $u$  be a solution of (3.7). If  $|\Omega_u \cap \omega| = |\omega|$ , then*

$$-\Delta u = \lambda_a u \text{ in } \omega,$$

and therefore  $\omega \subset \Omega_u$ .

**Proof of Lemma 3.2.3.** Since  $u > 0$  a.e. on  $\omega$ , we define  $v \in H_0^1(D)$  by  $v = u$  outside  $\omega$  and  $-\Delta v = \lambda_a u$  in  $\omega$ . From the strict maximum principle, we get  $v > 0$  on  $\omega$  and  $|\Omega_v| = |\Omega_u|$ . By minimality ( $J(u) \leq J(v)$ ) we have,

$$\begin{aligned} \int_{\omega} (\nabla u - \nabla v) \cdot (\nabla u - \nabla v + 2\nabla v) - \lambda_a \int_{\omega} (u - v)(u + v) &\leq 0 \\ \int_{\omega} |\nabla u - \nabla v|^2 + \lambda_a \int_{\omega} (u - v)(2u - u - v) &\leq 0, \end{aligned}$$

(we use that  $u - v \in H_0^1(\omega)$  and  $-\Delta v = \lambda_a u$  in  $\omega$ ). We get that  $u = v$  a.e. in  $\omega$  and by continuity  $u = v > 0$  everywhere in  $\omega$ .  $\square$

If  $|\Omega_u \cap B_R| = |B_R|$ , applying this lemma to  $\omega = B_R$ , we would get  $\Omega_u \cap B_R = B_R$ , which is impossible since  $B_R$  is centered on  $\partial\Omega_u$ . If  $R$  is small enough we can also suppose,

$$0 < |\Omega_u \setminus B_R| < |D \setminus B_R|.$$

For the first inequality, we need that  $|B_R| < a$ , and for the second one we need  $a < |D| - |B_R|$ .

Let  $h > 0$  be such that  $h < |B_R| - |\Omega_u \cap B_R|$  (and so, if  $v \in \mathcal{F}$  with  $|\Omega_v| \leq a + h$ , then  $|\Omega_v \cap B_R| < |B_R|$ ). Let  $(\mu_n)$  an increasing sequence to  $+\infty$ . There exists  $v_n \in \mathcal{F}$  such that  $|\Omega_{v_n}| \leq a + h$  and,

$$J(v_n) + \mu_n(|\Omega_{v_n}| - a)^+ = \min_{v \in \mathcal{F}, |\Omega_v| \leq a+h} \{J(v) + \mu_n(|\Omega_v| - a)^+\}. \quad (3.13)$$

For this we use remark 3.2.5, and so the functional  $J(v) + \mu_n(|\Omega_v| - a)^+$  is bounded by below for  $v \in \mathcal{F}$ . Moreover, a minimizing sequence for this functional is bounded in  $H_0^1(D)$  and so weakly converges in  $H_0^1(D)$ , strongly in  $L^2(D)$  and almost everywhere (up to a sub-sequence) to some  $v_n$ . Using the lower semi-continuity of  $v \rightarrow \int_D |\nabla v|^2$  for the weak convergence, the strong convergence in  $L^2(D)$  and the lower semi-continuity of  $v \rightarrow |\Omega_v|$  for the convergence almost everywhere we see that  $v_n$  is such that (3.13) is true.

If  $|\Omega_{v_n}| \leq a$  then (3.9) is true with  $\mu_n$ , so we will suppose to the contrary that  $|\Omega_{v_n}| > a$  for all  $n$ .

**Step 1 : Euler-Lagrange equation for  $v_n$ .** If we set  $b_n = |\Omega_{v_n}|$ , then  $v_n$  is also solution of

$$J(v_n) = \min_{v \in \mathcal{F}, |\Omega_v| \leq b_n} J(v).$$

With the same proof as in lemma 3.2.1, we can write an Euler-Lagrange equation for  $v_n$  in  $B_R$ . That is, there exists  $\Lambda_n \geq 0$  such that, for  $\Phi \in C_0^\infty(B_R, \mathbb{R}^d)$ ,

$$\int_D 2(D\Phi \nabla v_n \cdot \nabla v_n) - \int_D |\nabla v_n|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v_n^2 \nabla \cdot \Phi = \Lambda_n \int_{\Omega_{v_n}} \nabla \cdot \Phi. \quad (3.14)$$

**Step 2 :  $\Lambda_n \geq \mu_n$ .** There exists  $\Phi \in C_0^\infty(B_R)$  such that  $\int_{\Omega_{v_n}} \nabla \cdot \Phi = 1$ .

Let  $v_n^t(x) = v_n(x + t\Phi(x))$ . We have  $v_n^t \in \mathcal{F}$  for  $t \geq 0$  small enough, and using derivation results recalled in the proof of lemma 3.2.1 and  $|\Omega_{v_n}| > a$ , we get

$$a < |\Omega_{v_n^t}| = |\Omega_{v_n}| - t + o(t) \leq a + h,$$

$$J(v_n^t) = J(v_n) + t\Lambda_n + o(t).$$

Now we use (3.13) with  $v = v_n^t$  in order to get,

$$J(v_n) + \mu_n(|\Omega_{v_n}| - a) \leq J(v_n) + t\Lambda_n + o(t) + \mu_n(|\Omega_{v_n}| - t - a),$$

and dividing by  $t > 0$  and letting  $t$  goes to 0, we finally get  $\Lambda_n \geq \mu_n$ .

**Step 3 :  $v_n$  strongly converges to some  $v$ .** Using (3.13) with  $v = u$ , we get

$$J(v_n) + \mu_n(|\Omega_{v_n}| - a) \leq J(u) \quad (3.15)$$

and so, using Remark 3.2.5, we can deduce that  $v_n$  weakly converge in  $H_0^1$  (up to a sub-sequence) to some  $v \in \mathcal{F}$  with  $|\Omega_v| \leq a + h$ . We also have the strong convergence in  $L^2(D)$  and the convergence almost everywhere. Since  $J$  is bounded from below on  $\mathcal{F}$ , we see from (3.15) that  $\mu_n(|\Omega_{v_n}| - a)$  is bounded and we get  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_{v_n}| = a$ , and so  $|\Omega_v| \leq a$ . From  $J(v_n) \leq J(u)$ , we get  $J(v) \leq \liminf J(v_n) \leq J(u)$  and so  $v$  is a solution of (3.7). Finally we can write, using (3.13), that  $J(v_n) \leq J(v)$  and we get, using the strong convergence of  $v_n$  in  $L^2$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \int_D |\nabla v_n|^2 \leq \int_D |\nabla v|^2.$$

We also have, with weak convergence in  $H_0^1(D)$  that

$$\int_D |\nabla v|^2 \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \int_D |\nabla v_n|^2.$$

We deduce that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \|\nabla v_n\|_{L^2(D)} = \|\nabla v\|_{L^2(D)}$ . With the weak-convergence, this gives the strong convergence of  $v_n$  to  $v$  in  $H_0^1(D)$ .

**Step 4 :**  $\lim \Lambda_n = \Lambda$ . We see that  $v$  is a solution of (3.7), so we can apply Lemma 3.2.1 to get that there exists a  $\Lambda_v$  such that

$$\forall \Phi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d), \int_D 2(D\Phi \nabla v \cdot \nabla v) - \int_D |\nabla v|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v^2 \nabla \cdot \Phi = \Lambda_v \int_{\Omega_v} \nabla \cdot \Phi.$$

We have  $u = v$  outside  $B_R$  so, using this equation and the Euler-Lagrange equation for  $u$  we see that  $\Lambda_v = \Lambda$ . Now, we write the Euler-Lagrange for  $v_n$  and  $\Phi \in C_0^\infty(D, \mathbb{R}^d)$  such that  $\int_{\Omega_v} \nabla \cdot \Phi \neq 0$ ,

$$\int_D 2(D\Phi \nabla v_n \cdot \nabla v_n) - \int_D |\nabla v_n|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v_n^2 \nabla \cdot \Phi = \Lambda_n \int_{\Omega_{v_n}} \nabla \cdot \Phi,$$

and, using the strong convergence of  $v_n$  to  $v$ , we get that

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \Lambda_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\int_D 2(D\Phi \nabla v_n \cdot \nabla v_n) - \int_D |\nabla v_n|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v_n^2 \nabla \cdot \Phi}{\int_{\Omega_{v_n}} \nabla \cdot \Phi} \\ &= \frac{\int_D 2(D\Phi \nabla v \cdot \nabla v) - \int_D |\nabla v|^2 \nabla \cdot \Phi + \lambda_a \int_D v^2 \nabla \cdot \Phi}{\int_{\Omega_v} \nabla \cdot \Phi} \\ &= \Lambda. \end{aligned}$$

Since  $\lim \mu_n = +\infty$  we get the contradiction from Steps 2 and 4, and so  $\mu_+(h)$  is finite.

To conclude this first part, we now have to see that  $\Lambda \leq \mu_+(h)$ . Let  $\Phi \in C_0^\infty$  be such that  $\int_{\Omega_u} \nabla \cdot \Phi = -1$ , and let  $u_t(x) = u(x + t\Phi(x))$ . Using the calculus in the proof of Lemma 3.2.1 we have, for  $t \geq 0$  small enough,

$$a \leq |\Omega_{u_t}| = a + t + o(t) \leq a + h,$$

$$J(u_t) = J(u) - t\Lambda + o(t).$$

Now, using (3.9), we have

$$J(u) + \mu_+(h)a \leq J(u) - t\Lambda + \mu_+(h)(a + t) + o(t),$$

and we get  $\Lambda \leq \mu_+(h)$ .

**Second part :**  $\lim \mu_+(h) = \Lambda$ .

We first see that  $\mu_+(h) > 0$  for  $h > 0$ . Indeed, if  $\mu_+(h) = 0$  we write

$$\text{for every } \varphi \in C_0^\infty(B_R) \text{ with } |\{\varphi \neq 0\}| < h, \quad J(u) \leq J(u + t\varphi),$$

so

$$-\Delta u = \lambda_a u \text{ in } B_R,$$

which contradicts  $0 < |\Omega_u \cap B_R| < |B_R|$ .

Let  $\varepsilon > 0$  and  $h_n > 0$  a decreasing sequence tending to 0. Because  $h \rightarrow \mu_+(h)$  is non-increasing, we just have to see that  $\lim \mu_+(h_n) \leq \Lambda + \varepsilon$  for a sub-sequence of  $h_n$ . If  $\Lambda > 0$ , let  $\varepsilon \in ]0, \Lambda[$  and  $0 < \alpha_n := \mu_+(h_n) - \varepsilon < \mu_+(h_n)$ ; if  $\Lambda = 0$ , let  $0 < \alpha_n = \mu_+(h_n)/2 < \mu_+(h_n)$ . There exists  $v_n$  such that

$$J(v_n) + \alpha_n(|\Omega_{v_n}| - a)^+ = \min_{v \in \mathcal{F}, |\Omega_v| \leq a + h_n} \{J(v) + \alpha_n(|\Omega_v| - a)^+\}.$$

Since  $\alpha_n < \mu_+(h_n)$  we see that  $|\Omega_{v_n}| > a$  (otherwise we write  $J(u) \leq J(v_n) + \alpha_n(|\Omega_{v_n}| - a)^+$ ). We now have 4 steps that are very similar to the 4 steps used in the previous part to show that

$\mu_+(h_n)$  is finite.

**Step 1 : Euler-Lagrange equation for  $v_n$ .** If  $v \in \mathcal{F}$  is such that  $|\Omega_v| \leq |\Omega_{v_n}|$ , we have  $J(v_n) \leq J(v)$ . Then, as in Lemma 3.2.1 we can write the Euler-Lagrange equation (3.14) for  $v_n$  in  $B_R$  for some  $\Lambda_n$ .

**Step 2 :**  $\Lambda_n \geq \alpha_n$ . Since  $|\Omega_{v_n}| > a$  the proof is the same as step 2 in the first part, with  $\alpha_n$  instead of  $\mu_n$ .

**Step 3 :  $v_n$  strongly converge to some  $v$ .** As in step 3 above, we just write,

$$J(v_n) + \alpha_n(|\Omega_{v_n}| - a)^+ \leq J(u),$$

to get (up to a sub-sequence) that  $v_n$  weakly converges in  $H_0^1(D)$ , strongly in  $L^2(D)$  and almost-everywhere to  $v \in \mathcal{F}$ . We have  $a < |\Omega_{v_n}| \leq a + h_n$  and so  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_{v_n}| = a$ . As in step 3 above, we deduce that  $v$  is a solution of (3.7), and using

$$J(v_n) + \alpha_n(|\Omega_{v_n}| - a) \leq J(v),$$

we get the strong convergence in  $H_0^1(D)$ .

**Step 4 :**  $\lim \Lambda_n = \Lambda$ . The proof is the same as in step 4 of the first part of the proof. We write the Euler-Lagrange equation for  $v$  in  $D$  and use  $u = v$  outside  $B_R$ . We get that  $\lim \Lambda_n = \Lambda$  by letting  $n$  go to  $+\infty$  in the Euler-Lagrange equation for  $v_n$  in  $B_R$  (using the strong convergence of  $v_n$ ).

We can now conclude this second part : if  $\Lambda > 0$ , we have, for  $n$  large enough,

$$\mu_+(h_n) - \varepsilon = \alpha_n \leq \Lambda_n \leq \Lambda + \varepsilon,$$

and so  $\mu_+(h_n) \leq \Lambda + 2\varepsilon$ .

If  $\Lambda = 0$  we have

$$\mu_+(h_n)/2 = \alpha_n \leq \Lambda_n \leq \varepsilon,$$

and so  $0 \leq \mu_+(h_n) \leq 2\varepsilon$ .

In both cases, we have  $\Lambda \leq \mu_+(h_n) \leq \Lambda + 2\varepsilon$ .

**Third part :**  $\lim \mu_-(h) = \Lambda$ .

Let  $h_n$  be a sequence decreasing to 0, and let  $\varepsilon > 0$ . Because  $h \rightarrow \mu_-(h)$  is increasing, we just have to show that  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_-(h_n) \geq \Lambda - \varepsilon$  for a sub-sequence of  $h_n$ .

We first see that  $\mu_-(h) \leq \Lambda$ . Let  $\Phi \in C_0^\infty(B_R, \mathbb{R}^d)$  be such that  $\int_{B_R} \nabla \cdot \Phi = 1$  and let  $u_t = u(x + t\Phi(x))$  for  $t \geq 0$ . We have (using the proof of Lemma 3.2.1),

$$a - h \leq |\Omega_{u_t}| = a - t + o(t) \leq a,$$

$$J(u_t) = J(u) + t\Lambda + o(t).$$

Now, using (3.8), we have

$$J(u) + \mu_-(h)a \leq J(u) + t\Lambda + \mu_-(h)(a - t) + o(t),$$

and we get  $\mu_-(h) \leq \Lambda$ .

Let  $v_n$  be a solution of the following minimization problem,

$$J(v_n) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)(|\Omega_{v_n}| - (a - h_n))^+ = \min_{w \in \mathcal{F}, |\Omega_w| \leq a} \left\{ J(w) + (\mu_-(h) + \varepsilon)(|\Omega_w| - (a - h_n))^+ \right\}. \quad (3.16)$$

We will first see that,

$$a - h_n \leq |\Omega_{v_n}| < a.$$

If  $|\Omega_{v_n}| = a$  we have,

$$J(u) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)|\Omega_u| \leq J(v_n) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)|\Omega_{v_n}| \leq J(w) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)|\Omega_w|,$$

for  $w \in \mathcal{F}$  with  $a - h_n \leq |\Omega_w| \leq a$  which contradicts the definition of  $\mu_-(h_n)$ .

Now, if  $|\Omega_{v_n}| < a - h_n$ , we have  $J(v_n) \leq J(v_n + t\varphi)$  for every  $\varphi \in C_0^\infty(B_R)$  with  $|\{\varphi \neq 0\}| < a - h_n - |\Omega_{v_n}|$ . And we get that  $-\Delta v_n = \lambda_a v_n$  in  $B_R$  and so, we have  $v_n \equiv 0$  on  $B_R$  or  $v_n > 0$  on  $B_R$ , but this last case contradicts  $|\Omega_{v_n}| < a$ . If  $v_n \equiv 0$  on  $B_R$ , because  $v_n = u$  outside  $B_R$ , we get  $u \in H_0^1(B_R)$ , and using  $J(u) \leq J(v_n)$ ,

$$\int_{B_R} |\nabla u|^2 - \lambda_a \int_{B_R} u^2 \leq 0.$$

We now deduce ( $u \not\equiv 0$  on  $B_R$ ) that  $\lambda_a \geq \lambda_1(B_R)$ , which is a contradiction, at least for  $R$  small enough.

We now study the sequence  $v_n$  in a very similar way than above.

**Step 1 : Euler-Lagrange equation for  $v_n$ .**  $J(v_n) \leq J(v)$  for  $v \in \mathcal{F}$  with  $|\Omega_v| \leq |\Omega_{v_n}|$ , so we have an Euler-Lagrange equation (3.14) for  $v_n$  in  $B_R$  for some  $\Lambda_n$ .

**Step 2 :**  $\Lambda_n \leq (\mu_-(h_n) + \varepsilon)$ . Since  $|\Omega_{v_n}| < a$ , we take  $\Phi \in C_0^\infty(B_R, \mathbb{R}^d)$  with  $\int_{B_R} \nabla \cdot \Phi = -1$  and  $v_n^t(x) = v_n(x + t\Phi(x))$  for  $t \geq 0$  small. We have  $|\Omega_{v_n^t}| = |\Omega_{v_n}| + t + o(t) \leq a$  and  $J(v_n^t) = J(v_n) - \Lambda_n t + o(t)$  and writing (3.16) with  $w = v_n^t$  we get the result.

**Step 3 :  $v_n$  strongly converge to some  $v$ .** As in step 3 above we just write that

$$J(v_n) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)(|\Omega_{v_n}| - (a - h_n)) \leq J(u) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)h_n,$$

to get (up to a sub-sequence) that  $v_n$  weakly converge in  $H_0^1(D)$ , strongly in  $L^2(D)$  and almost-everywhere to  $v \in \mathcal{F}$ . We have  $a - h_n < |\Omega_{v_n}| \leq a$  and so  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\Omega_{v_n}| = a$ . As in step 3 above, we deduce that  $v$  is a solution of (3.7), and using

$$J(v_n) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)(|\Omega_{v_n}| - (a - h_n)) \leq J(v) + (\mu_-(h_n) + \varepsilon)(|\Omega_v| - (a - h_n))^+,$$

we get the strong convergence in  $H_0^1(D)$ .

**Step 4 :**  $\lim \Lambda_n = \Lambda$ . The proof is exactly the same as in step 4 above in the study of the limit of  $\mu_+(h_n)$ .

Now we have, using steps 2 and 4, for  $n$  large enough,

$$\Lambda - \varepsilon \leq \Lambda_n \leq \mu_-(h_n) + \varepsilon \leq \Lambda + \varepsilon,$$

and so  $\lim_{n \rightarrow \infty} \mu_-(h_n) = \Lambda$ .

**Fourth part :  $\Lambda > 0$ .** We would like to show that  $\Lambda > 0$  (which implies  $\mu_-(h) > 0$  for  $h$  small enough). We argue by contradiction and we suppose that  $\Lambda = 0$ . The proof is very close to the proof of Proposition 6.1 in [19]. We start with the following proposition :

**Proposition 3.2.2** Assume  $\Lambda = 0$ . Then, there exists  $\eta$  a decreasing function with  $\lim_{r \rightarrow 0} \eta(r) = 0$  such that, if  $x_0 \in B_{R/2}$  and  $B(x_0, r) \subset B_{R/2}$  with  $|\{u = 0\} \cap B(x_0, r)| > 0$ , then

$$\frac{1}{r} \int_{\partial B(x_0, r)} u \leq \eta(r). \quad (3.17)$$

**Proof of Proposition 3.2.2.** Let  $x_0, r$  be as above, and we set  $B_r = B(x_0, r)$ . Let  $v$  be defined by,

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda_a u & \text{in } B_r \\ v &= u & \text{on } \partial B_r, \end{cases}$$



and  $v = u$  outside  $B_r$ . We have  $v > 0$  on  $B_r$ . We get, using (3.9),

$$\int_{B_r} (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) - \lambda_a \int_{B_r} (u^2 - v^2) \leq \mu_+(\omega_d r^d) |\{u = 0\} \cap B_r|, \quad (3.18)$$

we also get (using  $-\Delta v = \lambda_a u$  in  $B_r$ ),

$$\begin{aligned} \int_{B_r} (|\nabla u|^2 - |\nabla v|^2) - \lambda_a \int_{B_r} u^2 - v^2 &= \int_{B_r} \nabla(u-v) \cdot \nabla(u-v+2v) - \lambda_a \int_{B_r} u^2 - v^2 \\ &= \int_{B_r} |\nabla(u-v)|^2 + \lambda_a \int_{B_r} (u-v)^2. \end{aligned} \quad (3.19)$$

Now, with the same computations as in [5],[66] (with  $\lambda_a u$  instead of  $f$ ) we get,

$$|\{u = 0\} \cap B_r| \left( \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} u \right)^2 \leq C \int_{B_r} |\nabla(u-v)|^2. \quad (3.20)$$

Now, using (3.18), (3.19) and (3.20) we get the result.  $\square$

**End of proof of Theorem 3.2.2.** Now, the rest of the proof is the same as Proposition 6.2 in [19] with  $\lambda_a u$  instead of  $f\chi_{\Omega_u}$ . The idea is that, from the estimate (3.17) of Proposition 3.2.2,  $\nabla u$  tends to 0 at the boundary, and consequently the measure  $\Delta u$  does not charge the boundary  $\partial\Omega_u$ . It follows that  $-\Delta u = \lambda_a u$  in  $B_R$ , which, by strict maximum principle, contradicts that  $u$  is zero on some part of  $B_R$ .  $\square$

### 3.2.3 Proof of Theorem 3.2.1

Let  $\Omega^*$  be a solution of (3.2). Then  $u = u_{\Omega^*}$  is a solution of (3.7), and thus satisfies Proposition 3.2.1 and Theorem 3.2.2; moreover,  $\Omega^* = \Omega_u$ . Like in the previous section, we work in  $B$ , a small ball centered in  $\partial\Omega_u$ . Since the approach is local, we will show regularity for the part of  $\partial\Omega_u$  included in  $B$ ; but  $B$  can be centered on every point of  $\partial\Omega_u \cap D$ , so this is of course enough to lead to the announced results in Theorem 3.2.1.

Coupled with Remark 3.2.1, we conclude that it is sufficient to prove :

$$\left. \begin{aligned} (a) \quad & \Omega^* \text{ has finite perimeter in } B \text{ and } \mathcal{H}^{d-1}((\partial\Omega^* \setminus \partial^*\Omega^*) \cap B) = 0 \\ (b) \quad & \Delta u_{\Omega^*} + \lambda_1(\Omega^*)u_{\Omega^*} = \sqrt{\Lambda}\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega^* \text{ in } B, \\ (c) \quad & \text{if } d=2, \partial\Omega^* \cap B = \partial^*\Omega^* \cap B. \end{aligned} \right\} \quad (3.21)$$

We use the same arguments as in [5] and [66], but we have to deal with the term in  $\int u^2$  instead of  $\int fu$  (in [66]). So we first start with the following technical lemma.

**Lemma 3.2.4** *There exist  $C_1, C_2, r_0 > 0$  such that, for  $B(x_0, r) \subset B$  with  $r \leq r_0$ ,*

$$\begin{aligned} \text{if } \frac{1}{r} \int_{\partial B(x_0, r)} u &\geq C_1 \quad \text{then} \quad u > 0 \text{ on } B(x_0, r), \\ \text{if } \frac{1}{r} \int_{\partial B(x_0, r)} u &\leq C_2 \quad \text{then} \quad u \equiv 0 \text{ on } B(x_0, r/2). \end{aligned} \quad (3.22)$$

**Proof.** The first point comes directly from the proof of Proposition 3.2.2. We take the same  $v$  and, using equation (3.20), we see that there exists  $C_1$  such that if  $\frac{1}{r} \int_{\partial B(x_0, r)} u \geq C_1$ , then  $|\{u = 0\} \cap B(x_0, r)| = 0$ .

For the second part we argue as in Theorem 3.1 in [6]. We will denote  $B_r$  for  $B(x_0, r)$ . In this proof,  $C$  denotes (different) constants which depend only on  $a, d, D, u$  and  $B$ , but not on  $x_0$  or  $r$ .

Let  $\varepsilon > 0$  small and such that  $\{u = \varepsilon\}$  is smooth (true for almost every  $\varepsilon$ ), let  $D_\varepsilon = (B_r \setminus \overline{B}_{r/2}) \cap \{u > \varepsilon\}$  and  $v_\varepsilon$  be defined by

$$\begin{cases} -\Delta v_\varepsilon &= \lambda_a u & \text{in } D_\varepsilon \\ v_\varepsilon &= u & \text{in } D \setminus B_r \\ v_\varepsilon &= u & \text{in } B_r \cap \{u \leq \varepsilon\} \\ v_\varepsilon &= \varepsilon & \text{in } \overline{B}_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}. \end{cases}$$

We see that  $u - v_\varepsilon$  is harmonic in  $D_\varepsilon$ .

We now show that  $(v_\varepsilon - u)_\varepsilon$  is bounded in  $H^1(D)$ , for small  $\varepsilon > 0$ . Let  $\varphi$  be in  $C_0^\infty(B_r)$  with  $0 \leq \varphi \leq 1$  and  $\varphi \equiv 1$  on  $\overline{B}_{r/2}$ . Let  $\Psi = (1 - \varphi)u + \varepsilon\varphi = u + \varphi(\varepsilon - u)$ . We have :

$$\Psi - u = 0 = v_\varepsilon - u \text{ on } \partial B_r \cup (\partial D_\varepsilon \cap (B_r \setminus \overline{B}_{r/2})),$$

and

$$\Psi - u = \varepsilon - u = v_\varepsilon - u \geq -\|u\|_\infty \text{ on } \partial D_\varepsilon \cap \partial B_{r/2},$$

so using that  $v_\varepsilon - u$  is harmonic, we get  $-\|u\|_\infty \leq v_\varepsilon - u \leq 0$  on  $D_\varepsilon$  and,

$$\int_{D_\varepsilon} |\nabla(v_\varepsilon - u)|^2 \leq \int_{D_\varepsilon} |\nabla(\Psi - u)|^2.$$

Now, using that  $\nabla\Psi = \nabla u(1 - \varphi) - (\nabla\varphi)u + \varepsilon\nabla\varphi$  and the  $L^\infty$  bounds for  $u$  and  $\nabla u$ , we see that  $v_\varepsilon - u$  is bounded in  $H^1(D)$ .

Now, up to a subsequence,  $v_\varepsilon$  weakly converges in  $H_0^1(D)$  to  $v$  such that :

$$\begin{cases} -\Delta v &= \lambda_a u & \text{in } (B_r \setminus \overline{B}_{r/2}) \cap \Omega_u \\ v &= u & \text{in } D \setminus B_r \\ v &= 0 & \text{in } \overline{B}_{r/2} \cup (B_r \cap \{u = 0\}). \end{cases}$$

Using (3.8) with  $h = |B_{r/2}|$ , and  $u = v$  in  $D \setminus B_r$ , we have :

$$\int_{B_r} |\nabla u|^2 - \lambda_a \int_{B_r} u^2 + \mu_-(h)|\Omega_u \cap B_r| \leq \int_{B_r} |\nabla v|^2 - \lambda_a \int_{B_r} v^2 + \mu_-(h)|\Omega_v \cap B_r|,$$

and so,

$$\begin{aligned} & \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 \mu_-(h)|\Omega_u \cap B_{r/2}| \\ & \leq \int_{B_r \setminus B_{r/2}} \nabla(v - u) \cdot \nabla(u - v + 2v) - \lambda_a \int_{B_r \setminus B_{r/2}} (v^2 - u^2) + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2 \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{D_\varepsilon} \nabla(v_\varepsilon - u) \cdot \nabla v_\varepsilon - \lambda_a \int_{D_\varepsilon} (v_\varepsilon^2 - u^2) + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2 \\ & = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}} (\varepsilon - u) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + 2\lambda_a \int_{D_\varepsilon} (v_\varepsilon - u)u - \lambda_a \int_{D_\varepsilon} (v_\varepsilon^2 - u^2) + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2 \\ & = \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}} (\varepsilon - u) \frac{\partial v_\varepsilon}{\partial n} + \lambda_a \int_{D_\varepsilon} (2uv_\varepsilon - u^2 - v_\varepsilon^2) + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2 \\ & \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} 2 \int_{\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}} (\varepsilon - u) \nabla v_\varepsilon \cdot \vec{n} + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2, \end{aligned} \tag{3.23}$$

where  $\vec{n}$  is the outward normal of  $D_\varepsilon$  and so the inward normal of  $B_{r/2}$ . Let  $w_\varepsilon$  be such that,

$$\begin{cases} -\Delta w_\varepsilon &= \lambda_a u & \text{on } B_r \setminus \overline{B}_{r/2} \\ w_\varepsilon &= u & \text{on } \partial B_r \cap \{u > \varepsilon\} \\ w_\varepsilon &= \varepsilon & \text{on } (\partial B_r \cap \{u \leq \varepsilon\}) \cup \partial B_{r/2}. \end{cases}$$

Because  $w_\varepsilon \geq \varepsilon$  on  $\partial(B_r \setminus B_{r/2})$  and super-harmonic in  $B_r \setminus \overline{B}_{r/2}$ , we get that  $w_\varepsilon \geq \varepsilon$  in  $B_r \setminus \overline{B}_{r/2}$ . In particular  $w_\varepsilon \geq v_\varepsilon = \varepsilon$  in  $\partial D_\varepsilon \cap (B_r \setminus \overline{B}_{r/2})$ . Moreover, we also have  $w_\varepsilon \geq v_\varepsilon$  on  $\partial D_\varepsilon \cap (\partial B_r \cup \partial B_{r/2})$ ,

and since  $w_\varepsilon - v_\varepsilon$  is harmonic in  $D_\varepsilon$ , we get  $w_\varepsilon \geq v_\varepsilon$  in  $D_\varepsilon$ . Using  $w_\varepsilon = v_\varepsilon = \varepsilon$  on  $\partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}$ , we can now compare the gradients of  $w_\varepsilon$  and  $v_\varepsilon$  on this set,

$$0 \leq -\nabla v_\varepsilon \cdot \vec{n} \leq -\nabla w_\varepsilon \cdot \vec{n} \text{ on } \partial B_{r/2} \cap \{u > \varepsilon\}. \quad (3.24)$$

Let now  $w_\varepsilon^0$  be defined by  $w_\varepsilon^0 = w_\varepsilon$  on  $\partial(B_r \setminus \overline{B}_{r/2})$  and harmonic in  $B_r \setminus \overline{B}_{r/2}$ . We use now the following estimate :

$$0 \leq -\nabla w_\varepsilon^0 \cdot \vec{n} \leq \frac{C}{r} \int_{\partial B_r} (u - \varepsilon)^+ \leq C\gamma \text{ on } \partial B_{r/2}, \quad (3.25)$$

where  $\gamma = \frac{1}{r} \int_{\partial B_r} u$  (to get this estimate, we can first prove, using a comparison argument, that  $|\nabla w_\varepsilon^0| \leq \frac{C}{r} \|w_\varepsilon^0 - \varepsilon\|_{\infty, B_{3r/4} \setminus B_{r/2}}$ , and then conclude using again maximum principle and Poisson formula for functions that are harmonic in a ball). Let  $w_\varepsilon^1 = w_\varepsilon - w_\varepsilon^0$ , we have  $w_\varepsilon^1 = 0$  on  $\partial(B_r \setminus \overline{B}_{r/2})$  and  $-\Delta w_\varepsilon^1 = \lambda_a u$  in  $B_r \setminus \overline{B}_{r/2}$  and so,

$$\|\nabla w_\varepsilon^1\|_{\infty, B_r \setminus B_{r/2}} \leq Cr \|u\|_\infty \leq Cr. \quad (3.26)$$

Now using (3.23), (3.24), (3.25) and (3.26) we get,

$$L := \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \mu_-(h) |\Omega_u \cap B_{r/2}| \leq C(\gamma + r) \int_{\partial B_{r/2}} u + \lambda_a \int_{B_{r/2}} u^2. \quad (3.27)$$

Our goal is now to bound from above the right-hand of this inequality with  $CL(\gamma + r)$  : and so if  $\gamma$  and  $r$  are small enough we will get  $L = 0$  and so  $u \equiv 0$  in  $B_{r/2}$ .

We now give an estimate of  $\|u\|_{\infty, B_{r/2}}$  in term of  $\gamma$ . Let  $w = 0$  on  $\partial B_r$  and  $-\Delta w = \lambda_a u$  in  $B_r$ . We have (using (3.3))  $\Delta(u - w) = \Delta u + \lambda_a u \geq 0$  in  $B_r$  and  $u - w = u$  on  $\partial B_r$  so,

$$\|u - w\|_{\infty, B_{r/2}} \leq C \int_{\partial B_r} u \leq C\gamma r.$$

We also have that

$$\|w\|_{\infty, B_r} \leq Cr^2 \|u\|_{\infty, B_r} \leq Cr^2,$$

and finally,

$$\|u\|_{\infty, B_{r/2}} \leq C(\gamma r + r^2). \quad (3.28)$$

We now write (using (3.28)),

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{r/2}} u &\leq C \left( \int_{B_{r/2}} |\nabla u| + \frac{1}{r} \int_{B_{r/2}} u \right) \\ &\leq C \left( \frac{1}{2} \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \frac{1}{2} |\Omega_u \cap B_{r/2}| + \frac{1}{r} |\Omega_u \cap B_{r/2}| \|u\|_{\infty, B_{r/2}} \right). \end{aligned}$$

Here we use Theorem 3.2.2 to see that there exists  $h_0$  such that

$$\frac{\Lambda}{2} \leq \mu_-(h) \leq \Lambda, \quad 0 < h \leq h_0.$$

And so, we have

$$\begin{aligned} \int_{\partial B_{r/2}} u &\leq C \left( \int_{B_{r/2}} |\nabla u|^2 + \mu_-(h) |\Omega_u \cap B_{r/2}| + C |\Omega_u \cap B_{r/2}| (\gamma + r) \right) \\ &\leq CL(1 + \gamma + r), \end{aligned} \quad (3.29)$$

with  $C$  independent of  $r$  for every  $r$  small enough such that  $h = |B_{r/2}| \leq h_0$ . We also have (using (3.28))

$$\int_{B_{r/2}} u^2 \leq C |\Omega_u \cap B_{r/2}| (\gamma r + r^2) \leq CL(\gamma r + r^2). \quad (3.30)$$

We now get, from (3.27), (3.29) and (3.30), if  $\gamma \leq 1$  and  $r \leq 1$ ,

$$L \leq C(\gamma + r)L(1 + \gamma + r) + CL(\gamma r + r^2) \leq CL(\gamma + r),$$

and, if we suppose  $r \leq \frac{1}{2C}$  we get,

$$L \leq CL\gamma + \frac{L}{2},$$

and so, if  $\gamma < \frac{1}{2C}$  we get  $L = 0$  and  $u \equiv 0$  on  $B_{r/2}$ .  $\square$

With the help of this lemma, we are now able to successively prove the three properties (a),(b) and (c) of (3.21).

**Proof of (a).** The proof is now, using (3.22) in lemma 3.2.4, the same as in [66] or in [5]. Here are the main steps : we first show that there exists  $C_1, C_2$  and  $r_0$  such that, for every  $B(x_0, r) \subset B$  with  $r \leq r_0$ ,

$$0 < C_1 \leq \frac{|B(x_0, r) \cap \Omega_u|}{|B(x_0, r)|} \leq C_2 < 1,$$

and

$$C_1 r^{d-1} \leq (\Delta u + \lambda_a u)(B(x_0, r)) \leq C_2 r^{d-1}.$$

The proof is the same as in [66] with  $\lambda_a u$  instead of  $f$ . It gives directly (using the Geometrical measure theory, see section 5.8 in [53]) the first point of Theorem 3.2.1.

**Proof of (b).** For the second point, we see that  $\Delta u + \lambda_a u$  is absolutely continuous with respect to  $\mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega_u$  which is a Radon-Measure (using the first point), so we can use Radon's Theorem. To compute the Radon's derivative, we argue as in Theorem 2.13 in [66] or (4.7,5.5) in [5]. The main difference is that here, we have to use (3.10) in Theorem 3.2.2 to show that, if  $u_0$  denotes a blow-up limit of  $u(x_0 + rx)/r$  (when  $r$  goes to 0), then  $u_0$  is such that,

$$\int_{B(0,1)} |\nabla u_0|^2 + \Lambda |\{u_0 \neq 0\} \cap B(0,1)| \leq \int_{B(0,1)} |\nabla v|^2 + \Lambda |\{v \neq 0\} \cap B(0,1)|,$$

for every  $v$  such that  $v = u_0$  outside  $B(0,1)$ . To show this, in [5] or in [66] the authors use only perturbations in  $B(x_0, r)$  with  $r$  goes to 0, so using (3.10), we get the same result. We can compute the Radon's derivative and get (in  $B$ )

$$\Delta u + \lambda_a u = \sqrt{\Lambda} \mathcal{H}^{d-1} \llcorner \partial\Omega_u.$$

Now,  $u$  is a weak-solution in the sense of [66] and [5] and we directly get the analytic regularity of  $\partial^* \Omega_u$  (this regularity is shown for weak-solutions).

**Proof of (c).** If  $d = 2$ , in order to have the regularity of the whole boundary, we have to show that Theorem 6.6 and Corollary 6.7 in [5] (which are for solutions and not weak-solutions) are still true for our problem. The Corollary directly comes from the Theorem. So we need to show that, if  $d = 2$  and  $x_0 \in \partial\Omega_u$ , then

$$\lim_{r \rightarrow 0} \int_{B(x_0, r)} \max\{\Lambda - |\nabla u|^2, 0\} = 0. \quad (3.31)$$

We argue as in Theorem 6.6 in [5]. Let  $\zeta \in C_0^\infty(B)$  be nonnegative and let  $v = \max\{u - \varepsilon\zeta, 0\}$ . Using (3.8) with this  $v$  and  $h = |0 < u \leq \varepsilon\zeta| \leq |\{\zeta \neq 0\}|$  we get,

$$\begin{aligned} \mu_-(h) |0 < u \leq \varepsilon\zeta| &\leq \int |\nabla v|^2 - \int |\nabla u|^2 + \lambda_a \int (u^2 - v^2) \\ &= \int |\nabla \min\{\varepsilon\zeta, u\}|^2 - 2 \int \nabla u \cdot \nabla \min\{\varepsilon\zeta, u\} \\ &\quad + \lambda_a \int_{\{u < \varepsilon\zeta\}} u^2 - \lambda_a \int_{\{u \geq \varepsilon\zeta\}} (\varepsilon\zeta)^2 + 2\lambda_a \int_{\{u \geq \varepsilon\zeta\}} u\varepsilon\zeta. \end{aligned}$$

Using  $-\Delta u = \lambda_a u$  in  $\Omega_u$  we get :

$$\int \nabla u \cdot \nabla \min\{\varepsilon \zeta, u\} = \lambda_a \int u \min\{\varepsilon \zeta, u\} = \lambda_a \int_{\{u < \varepsilon \zeta\}} u^2 + \lambda_a \int_{\{u \geq \varepsilon \zeta\}} u \varepsilon \zeta,$$

and so,

$$\mu_-(h) |0 < u \leq \varepsilon \zeta| \leq \int_{\{u < \varepsilon \zeta\}} |\nabla u|^2 + \int_{\{u \geq \varepsilon \zeta\}} \varepsilon^2 |\nabla \zeta|^2 - \lambda_a \int_{\{u < \varepsilon \zeta\}} u^2 - \lambda_a \int_{\{u \geq \varepsilon \zeta\}} (\varepsilon \zeta)^2,$$

and so, we can deduce that,

$$\int_{\{0 < u < \varepsilon \zeta\}} (\Lambda - |\nabla u|^2) \leq \int_{\{u \geq \varepsilon \zeta\}} \varepsilon^2 |\nabla \zeta|^2 + (\Lambda - \mu_-(h))h.$$

The only difference now with [5] is the last term. Using Theorem 3.2.2, we see that  $(\Lambda - \mu_-(h))h = o(h)$ , so we can choose the same kind of  $\zeta$  and  $\varepsilon$  as in [5] to get (3.31) (see Theorem 5.7 in [19] for more details).  $\square$

### 3.2.4 Appendix

In this appendix, we discuss the hypothesis “ $D$  is connected”. We begin with the following example, taken from [20].

**Example 3.2.1** (from [20]) We take  $D = D_1 \cup D_2$ , where  $D_1, D_2$  are disjoint disks in  $\mathbb{R}^2$  of radius  $R_1, R_2$  with  $R_1 > R_2$ . If  $a = \pi R_1^2 + \varepsilon$ , then the solution  $u$  of (3.6) coincides with the first eigenfunction of  $D_1$  and is identically 0 on  $D_2$ , and thus  $\Omega_u = D_1$  and  $|\Omega_u| < a$ .

In this case, we can choose an open subset  $\omega$  of  $D_2$  with  $|\omega| = \varepsilon$ . Then  $\Omega^* := D_1 \cup \omega$  is a solution of (3.2). Since  $\omega$  may be chosen as irregular as one wants, this proves that optimal domains are not regular in general.

However, we are able to prove the following proposition.

**Proposition 3.2.3 (The non-connected case)** *If we suppose that  $D$  is not connected, the problem (3.6) still has a solution  $u$  which is locally Lipschitz continuous in  $D$ . If  $\omega$  is any open connected component of  $D$ , we have three cases :*

1. *either  $u > 0$  on  $\omega$ ,*
2. *or  $u = 0$  on  $\omega$ ,*
3. *or  $0 < |\Omega_u \cap \omega| < |\omega|$ , and  $\partial\Omega_u$  has the same regularity as stated in Theorem 3.2.1.*

*If  $|\Omega_u| < a$ , then only the first two cases can appear.*

**Remark 3.2.6** It follows from Proposition 3.2.3 that we obtain the same regularity as in the connected case. Indeed, in the first two cases,  $\partial\Omega^* \cap \omega = \partial\Omega_u \cap \omega = \emptyset$ .

**Remark 3.2.7** To summarize, in all cases, there exists a solution  $\Omega^*$  to (3.2) which is regular in the sense of Theorem 3.2.1, but there may be some other non regular optimal shape. And if  $D$  is connected, any optimal shape is regular.

**Proof.** The existence and the Lipschitz regularity are stated in Proposition 3.2.1.

If  $u = 0$  a.e. on  $\omega$ , then we get  $u = 0$  on  $\omega$  by continuity.

If  $u > 0$  a.e. on  $\omega$ , by Lemma 3.2.3,  $u > 0$  everywhere in  $\omega$ .

If  $0 < |\Omega_u \cap \omega| < |\omega|$ , the restriction of  $u$  to  $\omega$  is of course solution of (3.7) with  $\omega$  instead of  $D$  and  $|\omega \cap \Omega_u|$  instead of  $a$ . We then may apply Theorem 3.2.1.

Finally, if  $|\Omega_u| < a$ , we may write  $J(u) \leq J(u + t\varphi)$  for all  $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  and for all  $\varphi \in C_0^\infty(D)$  such that  $|\Omega_\varphi| < a - |\Omega_u|$  and so :

$$0 = \left. \frac{dJ(u + t\varphi)}{dt} \right|_{t=0} = 2 \int_D (\nabla u \cdot \nabla \varphi) - 2\lambda_a \int_D u \varphi.$$

That is  $-\Delta u = \lambda_a u$  in  $D$  and the third case is not possible since by maximum principle  $u > 0$  or  $u = 0$  on each connected component of  $D$ .  $\square$

### 3.3 Minimisation de $\lambda_2$ sous contrainte de convexité

On s'intéresse dans ce paragraphe au problème d'optimisation suivant :

$$\lambda_2(\Omega^*) = \min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \text{ convexe}}} \lambda_2(\Omega), \quad (3.32)$$

où  $\lambda_2$  désigne la seconde valeur propre de l'opérateur laplacien avec condition de Dirichlet,  $V_0$  est un réel positif, et les formes  $\Omega$  considérées sont des ouverts du plan (peu des résultats qui vont suivre sont montrés en dimension quelconque, donc nous faisons d'ores et déjà cette hypothèse pour simplifier la présentation).

Rappelons brièvement la motivation mathématique de ce problème. D'une part le même problème en remplaçant  $\lambda_2$  par  $\lambda_1$  est résolu par le théorème de Faber-Krahn déjà évoqué dans le paragraphe précédent. En effet, la solution est la boule de volume  $V_0$ , et donc la contrainte de convexité n'intervient pas. D'autre part, le problème (3.32) sans contrainte de convexité est aussi résolu, puisqu'une conséquence facile du théorème de Faber-Krahn est que la solution est alors l'union disjointe de deux boules ayant chacune un volume de  $V_0/2$ . Il est assez simple de voir que le rajout d'une contrainte de connexité est inadaptée, car il n'y a alors pas de solution au problème. Par contre, le problème redevient intéressant mathématiquement avec cette contrainte de convexité. On se rapportera à [72] pour les références et les démonstrations des résultats évoqués dans cette introduction (voir aussi [70]).

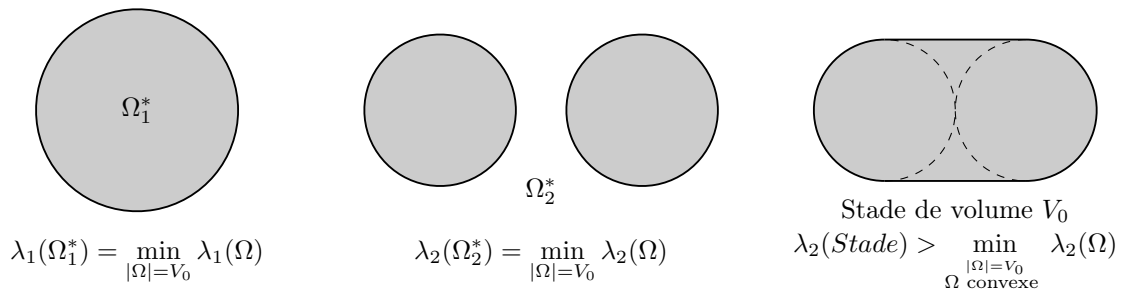


FIG. 3.1 – Minimisation des deux premières valeurs propres sous contrainte de volume

Ce problème a donc été étudié dans la thèse [110], voir les articles de A. Henrot et E. Oudet, [71], [72]. Ils démontrent, entre autres, que le stade (enveloppe convexe de deux disques de même rayon, tangents, et d'aire bien choisie, voir figure 3.1) n'est pas solution de (3.32). Nous avons choisi de travailler sur ce problème car les résultats obtenus par A. Henrot et E. Oudet s'inscrivent bien dans notre problématique : en effet, ils ont obtenu des résultats sur la solution de (3.32) (notamment l'existence et la régularité  $\mathcal{C}^1$ ), mais ont eu besoin d'hypothèses techniques supplémentaires pour approfondir l'analyse et obtenir des résultats plus fins sur cette solution. Nous discutons ici ces hypothèses.

#### 3.3.1 Les résultats de A. Henrot et E. Oudet

On rappelle ici les principaux résultats obtenus par A. Henrot et E. Oudet. On donnera quelques idées de démonstrations, utiles pour comprendre les hypothèses techniques qui interviennent. On réfère bien sûr à l'article [72] pour les démonstrations complètes.

Commençons par les résultats qui ne nécessitent pas d'hypothèse technique :

**Proposition 3.2** *Il existe  $\Omega^*$  solution du problème (3.32). De plus toute solution  $\Omega^*$  est de classe  $\mathcal{C}^1$ .*

**Remarque 3.2** Les preuves d'existence sont en général facilitées en présence de la contrainte de convexité, qui fournit de la compacité (voir par exemple [30, 80, 129]). Ici, il faut juste s'assurer qu'une suite minimisante  $\Omega_n$  ne va pas s'aplatir : on s'assure de cela en constatant que si les  $\Omega_n$  s'aplatissent dans une direction, alors ils sont contenus dans une suite de rectangles (ou de pavés

en dimension supérieure, où ce résultat d'existence est valable) qui s'aplatissent aussi dans cette direction ; et pour ces pavés, on peut calculer explicitement leurs premières valeurs propres  $\lambda_1$ , et constater qu'elles convergent vers  $+\infty$  ; on conclut en utilisant la propriété de monotonie des valeurs propres pour l'inclusion.

En ce qui concerne la régularité  $\mathcal{C}^1$ , les idées sont les suivantes : on commence par s'affranchir de la difficulté de la contrainte de volume en constatant que notre problème est équivalent à

$$\min_{\Omega \text{ convexe}} |\Omega| \lambda_2(\Omega), \quad (3.33)$$

dans le sens que toute solution de (3.32) est solution de (3.33), et inversement toute solution de ce dernier devient solution de (3.32) après une homothétie de rapport bien choisi pour satisfaire la contrainte de volume. Cette équivalence est due au comportement des valeurs propres vis-à-vis des homothéties :  $\lambda_2(\mu\Omega) = \lambda_2(\Omega)/\mu^2$ . Supposons donc par l'absurde que  $\Omega^*$  solution de (3.33) ne soit pas  $\mathcal{C}^1$ , c'est-à-dire soit contenue dans un cône centré en un point du bord et d'ouverture strictement inférieure à  $\pi$  ; on appelle ce centre du cône un "coin" (on utilise la convexité pour dire qu'avoir un "coin" est équivalent au caractère non- $\mathcal{C}^1$ ). Afin d'obtenir une contradiction, on étudie le comportement de  $|\Omega^*|$  et  $\lambda_2(\Omega^*)$  par une déformation qui consiste à "couper" le coin sur une hauteur  $\varepsilon$  (on note  $\Omega_\varepsilon$  la forme perturbée) : on peut ainsi montrer

$$\begin{aligned} |\Omega_\varepsilon| &= |\Omega^*| - C\varepsilon^2 + o(\varepsilon^2) \\ \lambda_2(\Omega_\varepsilon) &= \lambda_2(\Omega^*) + o(\varepsilon^2) \end{aligned} \quad (3.34)$$

avec  $C \neq 0$  indépendant de  $\varepsilon$ . Cela contredit facilement la minimalité de  $\Omega^*$ . La partie difficile consiste à obtenir l'estimation (3.34), utilisant le fait que, si  $\Omega^*$  possède un coin en un point, alors  $\nabla u_2$  converge vers 0 en ce point (en un sens faible), où  $u_2$  désigne une seconde fonction propre du laplacien. Néanmoins, il ne semble pas clair (nous n'avons pas trouvé ce résultat dans la littérature) que l'on puisse dire que  $\nabla u_2$  converge vers 0 ponctuellement dans un coin. On réfère à [24] où il est expliqué comment montrer (3.34) rigoureusement, et où le résultat de régularité  $\mathcal{C}^1$  est généralisé à des situations très générales d'optimisation des valeurs propres ou de l'énergie de Dirichlet, sous contrainte de convexité.

Dans la suite de leur travail, A. Henrot et E. Oudet écrivent des conditions d'optimalité pour le problème (3.32) : pour cela, ils ont besoin de la différentiabilité de  $\lambda_2$ , et il est classique que la simplicité de  $\lambda_2$  implique cette différentiabilité. Ils démontrent donc le résultat :

**Proposition 3.3** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32). On suppose qu'il existe une partie strictement convexe (voir la définition (3.35))  $\gamma$  ouvert relatif de  $\partial\Omega^*$ , non vide et  $\mathcal{C}^{1,1}$ .*

*Alors  $\lambda_2(\Omega^*)$  est simple, c'est-à-dire  $\lambda_2(\Omega^*) < \lambda_3(\Omega^*)$ .*

**Remarque 3.3** On explique déjà pourquoi la simplicité de la valeur propre se ramène à la différence entre  $\lambda_2$  et  $\lambda_3$  : il est connu que pour un domaine ouvert connexe, la première valeur propre est toujours simple, donc nécessairement  $\lambda_1(\Omega^*) \neq \lambda_2(\Omega^*)$ .

**Remarque 3.4** L'hypothèse géométrique faite dans cet énoncé n'apparaît pas explicitement dans [72] mais est utilisée dans la preuve. Ils demandent en fait que  $\partial\Omega^*$  soit  $\mathcal{C}^{1,1}$ . On explique ici pourquoi, même dans ce cas, l'hypothèse géométrique n'est pas toujours vérifiée. On peut en effet trouver des fonctions convexes, non linéaires,  $\mathcal{C}^{1,1}$ , et n'étant pourtant strictement convexes sur aucun intervalle non vide : il suffit de choisir  $f$  tel que  $f'' = \chi_\omega$ , où  $\omega$  est un compact de  $\mathbb{R}$  de mesure positive, mais d'intérieur vide (type ensemble de Cantor). Alors le graphe de  $f$  est convexe et  $\mathcal{C}^{1,1}$ , mais n'est strictement convexe sur aucun intervalle ; il y a une infinité de segments dans le bord de ce graphe, et ces segments forment même une partie dense dans ce bord. On peut ainsi construire (avec des recollements de graphes du type précédent) un ouvert convexe  $\Omega$  tel qu'il n'existe aucun ouvert relatif  $\gamma \subset \partial\Omega$  satisfaisant :

$$\forall x, y \in \gamma, ]x, y[ \subset \Omega. \quad (3.35)$$

Cette difficulté technique est fondamentale dans l'étude de la contrainte de convexité : en effet, il n'est pas simple d'exclure une telle forme  $\Omega$  singulière, car il est difficile d'écrire une condition

d'optimalité pour cet ensemble, puisque toute perturbation de cet ouvert devient non convexe. En quelque sorte, un tel ouvert sature la contrainte de convexité presque partout sur son bord  $\partial\Omega$ . La régularité  $\mathcal{C}^2$  (plutôt que  $\mathcal{C}^{1,1}$ ) de  $\partial\Omega^*$  suffit à exclure ces convexes singuliers : en effet, si la courbure est non nulle, alors elle est strictement positive sur un intervalle non vide, par continuité.

Une fois obtenue la différentiabilité de la fonctionnelle, A. Henrot et E. Oudet peuvent écrire l'équation d'Euler-Lagrange sous la forme suivante :

**Théorème 3.2** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32), et notons  $u_2$  une seconde fonction propre sur  $\Omega^*$ , normalisée (i.e. de norme  $L^2$  égale à 1). On suppose que*

$$- \Omega^* \text{ est } \mathcal{C}^{1,1}, \quad (3.36)$$

$$- \text{le bord de } \Omega^* \text{ ne contient qu'un nombre fini de segments.} \quad (3.37)$$

Alors

$$- \text{avec } \Lambda = \sqrt{\frac{\lambda_2(\Omega^*)}{|\Omega^*|}}, \text{ on a :}$$

$$\text{pour toute partie strictement convexe } \gamma \text{ de } \partial\Omega^*, |\nabla u_2|_{|\gamma} = \Lambda, \quad (3.38)$$

$$- \text{si } \Sigma \text{ est un segment inclus dans } \partial\Omega^*, \text{ on note } t \in [a, b] \text{ une paramétrisation de } \Sigma. \text{ Alors il existe } w \in \mathcal{C}^2([a, b]) \text{ positive telle que}$$

$$\begin{cases} |\nabla u_2|_{|\Sigma}(t) = \Lambda + w''(t), \quad \forall t \in [a, b] \\ w(a) = w'(a) = w''(a) = w(b) = w'(b) = w''(b) = 0. \end{cases} \quad (3.39)$$

**Remarque 3.5** Rappelons que la dérivée de forme de la fonction  $\lambda_2$  autour de  $\Omega$ , lorsqu'elle est simple, est donnée par

$$\forall \xi \in \Theta, \mathcal{J}'_{\Omega}(0) \cdot \xi = - \int_{\Omega} |\nabla u_2|^2 \xi \cdot \nu_{\Omega}$$

où  $\mathcal{J}'_{\Omega}(\theta) = \lambda_2((Id + \theta)(\Omega))$  (si  $u_2$  est normalisée). En d'autres termes, la structure de  $\mathcal{J}'_{\Omega}(0)$  est donnée par  $\mathcal{L} = -|\nabla u_2|^2$  (notons que sous les hypothèses de régularité faites dans le théorème 3.2 sur  $\Omega^*$ ,  $\nabla u_2 \in \mathcal{C}^0(\Omega^*)$ ).

Ainsi l'équation (3.38) est l'équation d'Euler-Lagrange du problème (3.32), comme s'il n'y avait pas de contrainte de convexité : cela est dû à une propriété montrée dans [88, lemme 2], qui dit qu'une perturbation d'une fonction strictement convexe est proche de son enveloppe convexe, à l'ordre 1 (en norme infinie) en la taille de la perturbation.

Quant à l'équation (3.39), elle prend en compte la contrainte de convexité, et on peut voir  $w$  comme une sorte de multiplicateur de Lagrange pour cette contrainte, comme le  $\zeta_0$  du chapitre 2, à part que leur approche est locale, et qu'ils utilisent un autre paramétrage, à savoir que  $\Omega^*$  est localement un graphe (voir aussi le théorème 3.6).

**Remarque 3.6** Encore une fois, l'hypothèse géométrique (nombre fini de segments dans le bord) n'est pas spécifié dans [72], mais est utilisée dans la preuve pour obtenir  $w''(a) = w''(b) = 0$  : en effet, ils utilisent le fait que les parties du bord qui touchent ce segment de chaque côté sont strictement convexes, et donc on peut écrire  $|\nabla u_2| = \Lambda$  sur ces parties, et conclure en utilisant la continuité de  $\nabla u_2$  au bord du segment (qui est aussi supposée implicitement, puisqu'elle est contenue dans l'hypothèse de régularité de  $\Omega^*$ ).

**Remarque 3.7** Une conséquence de l'équation d'optimalité sur les bords strictement convexes (3.38) est donnée par les résultats de régularité [130] et [83] (voir aussi le paragraphe 4.2.1) :

les parties strictement convexes de  $\partial\Omega^*$  sont analytiques.

Ce résultat ne nécessite aucune hypothèse de régularité sur  $\Omega^*$  : en effet, on sait au départ que  $\Omega^*$  est convexe et  $\mathcal{C}^1$  (voir proposition 3.2). Un résultat valable pour tout ensemble convexe donne la régularité  $H^2$  de  $u_2$  (voir [64]). Ainsi,  $\nabla u_2 \in H^1(\Omega^*, \mathbb{R}^2)$  et satisfait :

$$\begin{cases} -\Delta \nabla u_2 &= \lambda_2(\Omega^*) \nabla u_2 & \text{sur } \Omega^*, \\ \nabla u_2 &= |\nabla u_2| \nu_{\Omega^*} = \Lambda \nu_{\Omega^*} & \text{sur } \gamma. \end{cases}$$



où  $\gamma$  désigne les parties strictement convexes (ouvertes) de  $\partial\Omega^*$ . Ainsi,  $\nabla u_2$  est solution variationnelle d'un système elliptique (découplé). La trace étant une fonction continue, cette solution coïncide avec la solution au sens de Perron, continue sur  $\Omega^* \cup \gamma$  (voir [59, Théorème 8.30] ou [48]). Ainsi  $\nabla u_2 \in C^0(\Omega^* \cup \gamma)$ , ce qui permet d'appliquer successivement les résultats de [130] et de [83], et fournit le résultat annoncé.

A. Henrot et E. Oudet utilisent alors ces conditions d'optimalité pour obtenir des propriétés géométriques sur les formes optimales :

**Théorème 3.3** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32). On suppose que  $\Omega^*$  satisfait (3.36) et (3.37). Alors*

- *le bord de  $\Omega^*$  ne contient pas d'arc de cercle,*
- *le bord de  $\Omega^*$  contient au moins deux segments.*

**Remarque 3.8** Une première conséquence de ce résultat est que le stade, enveloppe convexe de deux disques tangents et de même volume (qui satisfait aux hypothèses (3.36) et (3.37)), n'est pas solution du problème (voir aussi [71]). Un résultat généralisant la première partie de l'énoncé ci-dessus a été obtenu dans [56] (voir aussi Proposition 4.1 au chapitre 4).

**Remarque 3.9** Pour compter le nombre de segments au bord, on se sert de la ligne nodale  $\{x \in \Omega^* / u_2(x) = 0\}$ , en utilisant le fait que si la ligne nodale touche le bord de  $\Omega^*$ , le gradient  $\nabla u_2$  s'annule. D'après un résultat de Melas-Alessandrini ([104], [1]), la ligne nodale touche le bord en exactement deux points, pour tout domaine convexe (cas régulier par Melas, adaptation au cas non régulier par Alessandrini). Cette propriété permet de montrer qu'il y a au moins deux segments sur le bord.

Il est aussi annoncé dans [72] qu'il y a exactement deux segments dans le bord. Mais il semble que leur démonstration, du fait qu'il n'y ait pas trois segments, est incomplète.

**Remarque 3.10** Une propriété encore non démontrée, à notre connaissance, est la symétrie de  $\Omega^*$  par rapport à deux axes orthogonaux. Les simulations numériques effectuées permettent de confirmer cette symétrie, et montrent aussi que la forme optimale  $\Omega^*$  est proche, mais distincte du stade (voir [110], [111], ou plus récemment [8]).

Le dernier résultat démontré par A. Henrot et E. Oudet est un résultat de non-régularité :

**Théorème 3.4** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32).*

*Alors, pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega^*$  n'est pas de classe  $C^{2,\varepsilon}$ .*

**Remarque 3.11** Plus précisément, il est démontré qu'on ne peut pas avoir  $u_2 \in C^2(\overline{\Omega^*})$  (voir le paragraphe 3.4.1 où l'on reprend l'idée de la preuve de ce résultat dans un autre cas).

### 3.3.2 A propos de l'hypothèse de régularité (3.36)

#### 3.3.2.1 Les résultats

Nous souhaitons maintenant discuter l'hypothèse (3.36). L'idée de départ était de démontrer la régularité supposée dans cette hypothèse (voir aussi [70, Problème ouvert n°7]). Nous avons au contraire obtenu le résultat suivant :

**Proposition 3.4** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32), satisfaisant (3.37). Alors*

*$\Omega^*$  n'est pas de classe  $C^{1,1}$ .*

Néanmoins, nous avons vérifié que, dans l'ensemble des démonstrations de [72], seule une hypothèse plus faible de régularité est vraiment utilisée, à savoir la continuité de  $\nabla u_2$  sur  $\overline{\Omega^*}$ . On sait, par exemple, que si  $\Omega^*$  est de classe  $C^{1,\alpha}$  pour un  $\alpha > 0$ , cette régularité est vérifiée (d'après les résultats de régularité de type Schauder : voir par exemple [59]). Nous démontrons cette propriété de continuité du gradient sans hypothèse a priori sur  $\Omega^*$  (voir proposition 3.5).

Nous avons donc approfondi l'étude pour identifier la régularité exacte des formes optimales. Le résultat complet de ce paragraphe est le suivant :

**Théorème 3.5** Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32) ayant un nombre fini de segments sur son bord (i.e. satisfaisant (3.37)). Alors

$$\Omega^* \text{ est de classe } \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}, \text{ mais } \forall \varepsilon > 0, \Omega^* \text{ n'est pas de classe } \mathcal{C}^{1, \frac{1}{2} + \varepsilon}.$$

De plus, les résultats de la proposition 3.3 et du théorème 3.2 sont encore valables.

**Remarque 3.12** Les irrégularités sont localisées aux points de concours des segments et des parties strictement convexes. En effet, comme on l'a déjà dit en remarque 3.7, les parties strictement convexes sont analytiques (pas *jusqu'au bord*), et les segments l'étant aussi, la forme  $\Omega^*$  est analytique par morceaux.

### 3.3.2.2 Preuve de la continuité du gradient

Dans ce paragraphe, nous montrons le résultat :

**Proposition 3.5** Soit  $\Omega^*$  une forme optimale pour (3.32). Si  $\Omega^*$  a un nombre fini de segments sur son bord (hypothèse (3.37)), alors

$$u_2 \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega^*}). \quad (3.40)$$

En conséquence, les résultats du théorème 3.2 restent valables.

La conséquence énoncée ici, comme on l'a déjà dit, vient du fait que les preuves de [72] restent valables avec (3.40) plutôt qu'avec l'hypothèse plus forte (3.36).

**Preuve :** On sait que  $u_2 \in H^2(\Omega^*)$  (voir [64]), et que  $\Omega^*$  est  $\mathcal{C}^1$  (proposition 3.2). D'après le théorème 3.2, sur l'ensemble (ouvert relatif)  $\gamma$  des parties strictement convexes de  $\partial\Omega^*$ , on a  $|\nabla u_2|_{|\gamma} = \Lambda$ , où  $|\nabla u_2|_{|\partial\Omega^*} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^*)$ .

Ainsi, avec [59, Théorème 8.30], on sait que  $u_2$  est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\Omega^* \cup \gamma$  (voir aussi remarque 3.7). Evidemment,  $u_2$  est aussi régulier sur  $\Omega^* \cup \Sigma$ , où  $\Sigma$  désigne un segment (relativement ouvert) de  $\partial\Omega^*$ .

Il reste donc à s'intéresser à la continuité de  $\nabla u_2$  au bord des segments, qui sont en nombre fini. Posons  $\Sigma = ]AB[$  un tel segment, qu'on choisit comme axe des  $x$  (on oriente l'axe des  $y$  de sorte que  $\Omega^*$  soit dans le demi-plan  $y < 0$ ).

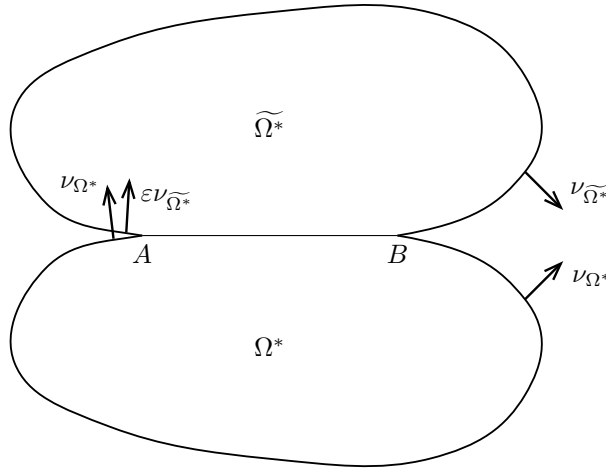


FIG. 3.2 – Symétrisation

On effectue une symétrisation par rapport à  $\Sigma$  (voir figure 3.2) : on obtient le nouveau domaine  $\widetilde{\Omega^*}$ . On définit  $\widetilde{u_2}$  sur  $\widetilde{\Omega^*}$  par imparisation dans la direction  $y$  :  $\widetilde{u_2}(x, y) = -u_2(x, -y)$  si  $y > 0$ .

Il est classique que  $u_2$  est encore fonction propre sur  $\widetilde{\Omega^*}$  (car le laplacien du symétrisé de  $u_2$  est égal au symétrisé du laplacien de  $u_2$ ). Donc, on sait que

$$\begin{cases} -\Delta \nabla \widetilde{u_2} &= \lambda_2(\Omega^*) \nabla \widetilde{u_2} & \text{sur } \widetilde{\Omega^*}, \\ \nabla \widetilde{u_2} &= \varepsilon |\nabla \widetilde{u_2}| \nu_{\widetilde{\Omega^*}} = \Lambda \varepsilon \nu_{\widetilde{\Omega^*}} & \text{sur } \partial \widetilde{\Omega^*}. \end{cases}$$

où  $\varepsilon(x, y) = \mathbb{1}_{y < 0} - \mathbb{1}_{y > 0}$ .

Le vecteur  $\nu_{\widetilde{\Omega}^*}$  n'est pas continu sur  $\partial\widetilde{\Omega}^*$ , mais  $\varepsilon\nu_{\widetilde{\Omega}^*}$  l'est, puisque  $\Omega^*$  est  $C^1$ . La condition au bord étant continue, et  $\nabla u_2$  étant  $H^1$ , on conclut à la continuité de  $\widehat{u}_2$  sur  $\widetilde{\Omega}^*$ , en utilisant que  $\widetilde{\Omega}^*$  est régulier au sens de Wiener (voir par exemple [59]). Ainsi,  $\nabla u_2$  est continu en  $A$  et  $B$ .  $\square$

### 3.3.2.3 Preuve du théorème 3.5

**Preuve :**

**Étape 1. Equation d'Euler-Lagrange :**

Soit  $\Omega^*$  une solution de (3.32). On utilise les résultats du théorème 3.2. On sait ainsi qu'il existe une constante  $\Lambda > 0$  telle que :

$$|\nabla u_2|_{|\gamma_-} = \Lambda. \quad (3.41)$$

Nous allons en déduire que  $\Omega^*$  est de classe  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ .

Comme il y a un nombre fini de segments, on peut travailler localement sur un voisinage du point de concours d'une partie strictement convexe  $\gamma_-$ , et d'une partie plate  $\gamma_+$ . On pourra prendre des voisinages suffisamment grands pour recouvrir tout le bord  $\partial\Omega^*$  (sauf éventuellement les points à l'intersection avec la ligne nodale, voir l'étape 5, mais ces points (au nombre de deux) sont à l'intérieur de segment du bord, pour lesquels la régularité est claire).

On se place dans la situation géométrique suivante :

- $\gamma_- \subset \partial\Omega^*$ ,  $\gamma_+ \subset \partial\Omega^*$ , et  $\overline{\gamma_-} \cap \overline{\gamma_+}$  est réduit à un point noté  $A$ ,
- $\gamma_-$  est une partie strictement convexe (au sens géométrique, voir (3.35)),
- $\gamma_+$  est une partie plate.

**Étape 2. Transport de l'équation sur un domaine régulier :**

On introduit l'application conforme du domaine  $\Omega^*$  : le théorème de représentation conforme de Riemann (voir [112] par exemple) donne l'existence d'une application biholomorphe  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \Omega^* (= \phi_{\Omega^*})$ , où  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) < 0\}$ .

De plus, avec un résultat dû à Carathéodory, on sait que  $\phi$  se prolonge de façon bicontinue entre les adhérences de  $\Omega^*$  et de  $\mathbb{H}$ . Enfin, on peut choisir  $\phi(0) = A$ , le point de jonction.

On pose  $J_+ := \phi^{-1}(\gamma_+) \subset \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ ,  $J_- := \phi^{-1}(\gamma_-)$ , et on prend  $\mathcal{V}$  un semi-voisinage borné de 0 dans  $\mathbb{H}$  tel que  $\partial\mathcal{V} \cap \mathbb{R} \subset \overline{J_-} \cup \overline{J_+}$  (voir Figure 3.3).

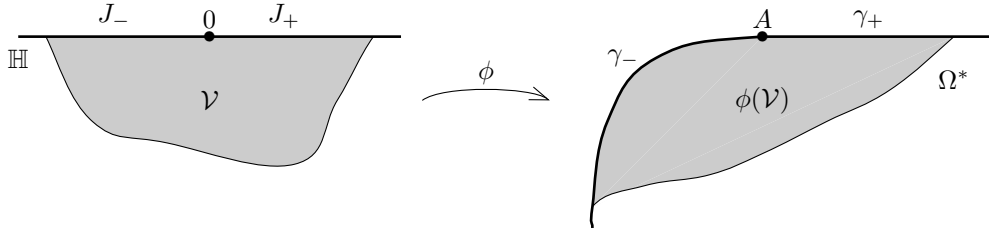


FIG. 3.3 – Application conforme

On peut reformuler le problème de Dirichlet, posé initialement sur  $\Omega^*$ , dans le domaine  $\mathbb{H}$  (qui est régulier). On met ainsi l'“inconnue”  $\Omega^*$  dans les équations : on note  $\widehat{\cdot}$  la composition par  $\phi$ , et on obtient, puisque la fonction  $\phi$  est holomorphe :

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{u}_2 &= \lambda_2(\Omega^*) |\phi'|^2 \widehat{u}_2 & \text{dans } \mathbb{H}, \\ \widehat{u}_2 &= 0 & \text{sur } \partial\mathbb{H}, \\ |\nabla \widehat{u}_2| &= |\phi'| |\nabla u_2| = \Lambda |\phi'| & \text{sur } J_-. \end{cases} \quad (3.42)$$

**Étape 3. Régularité de  $\phi$ , issue la régularité  $\mathcal{C}^1$  de  $\Omega^*$  :**

On doit donc reformuler la question de la régularité de  $\Omega^*$  sur  $\phi = \phi_{\Omega^*}$ . On a le lemme suivant, valable pour tout domaine convexe  $\mathcal{C}^1$  :

**Lemme 3.2** *Pour tout  $p \geq 1$ ,  $|\phi'| \in L^p_{loc}(\mathbb{H})$ . De plus, il existe  $\beta > 0$  tel que  $|\phi'| \geq \beta$ .*

On réfère à [58, Exo 15 page 71] pour la première partie du lemme, qui utilise le caractère  $\mathcal{C}^1$  ; en fait, on peut même montrer que  $\phi'$  est dans l'espace de Hardy  $h^p$ , qui est contenu dans  $L^p$  (voir aussi la remarque 3.15 pour des commentaires).

On réfère à [84] pour la seconde partie, valable pour tout domaine convexe (voir aussi [127, 100, 99]).

**Étape 4. Régularité de  $Arg(\phi')$  sur  $J_+$ , et de  $\ln(|\phi'|)$  sur  $J_-$  :**

Comme  $Arg(\phi')$  paramétrise l'angle de la tangente au bord de  $\partial\Omega^*$ ,  $Arg(\phi')$  est défini et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overline{J_+}$  (puisque  $\gamma_+$  est plat donc régulier).

D'après les résultats de régularité dans les espaces de Sobolev pour le problème (3.42) (sans la troisième équation, on a un problème elliptique à second membre  $L^p_{loc}$ ), on déduit de la régularité de  $|\phi'|$ , que  $\widehat{u_2} \in W^{2,p}_{loc}(\mathbb{H})$ .

Alors l'identité

$$|\nabla \widehat{u_2}| = |\phi'| |\nabla u_2| = \Lambda |\phi'| \text{ sur } J_-, \quad (3.43)$$

lie la régularité de  $|\phi'|$  sur  $J_-$  à celle de  $\widehat{u_2}$ . On en déduit que  $|\phi'|$  admet une trace sur  $J_-$  et que cette trace est dans  $W^{1-\frac{1}{p},p}(J_- \cap \partial\mathcal{V})$ . On doit passer au logarithme :

**Lemme 3.3** *Soit  $v : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{C}$  où  $\mathcal{U}$  est un ouvert borné lipschitzien de  $\mathbb{R}^2$ . Alors*

$$[v \in W^{1,p}(\mathcal{U}) \text{ et } |v| \geq \beta > 0 \text{ dans } \mathcal{U}] \Rightarrow \ln(v) \in W^{1,p}(\mathcal{U}).$$

$$[v \in W^{2,p}(\mathcal{U}) \text{ et } |v| \geq \beta > 0 \text{ dans } \mathcal{U}] \Rightarrow \ln(v) \in W^{2,p}(\mathcal{U}).$$

**Preuve du lemme 3.3 :** en notation de dérivées complexes,

$$(\ln v)' = v' \frac{1}{v},$$

avec  $v' \in L^p$  et  $\frac{1}{v} \in L^\infty$ , et comme  $\mathcal{U}$  est borné, on obtient  $(\ln v)' \in L^p(\mathcal{U})$ . Pour la dérivée seconde,

$$(\ln v)'' = v'' \frac{1}{v} - v'^2 \frac{1}{v^2}$$

avec  $v'' \in L^p(\mathcal{U})$ ,  $\frac{1}{v^2} \in L^\infty(\mathcal{U})$ , et  $v'^2 \in L^{\frac{p^*}{2}}(\mathcal{U})$  où  $p^* = \frac{2p}{2-p}$  si  $p < 2$ , et  $p^* = \infty$  si  $p \geq 2$ .

Dans tous les cas,  $\frac{p^*}{2} \geq p$ , et donc on obtient  $(\ln v)'' \in L^p(\mathcal{U})$ .  $\square$

Ainsi, avec la première partie du lemme,  $\ln(|\phi'|)|_{J_-} \in W^{1-\frac{1}{p},p}(J_- \cap \partial\mathcal{V})$ .

**Étape 5. Régularité d'un problème mixte :**

En posant  $a := \ln |\phi'| = \Re(\ln(\phi'))$  et  $b := Arg(\phi') = \Im(\ln(\phi'))$  (liées par les équations de Cauchy-Riemann), on est donc amené au problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \Delta a &= 0 & \text{dans } \mathbb{H} \\ a &= \ln\left(\frac{|\nabla \widehat{U}|}{\Lambda}\right) =: g_D & \text{sur } J_- \\ \partial_y a &= -\partial_x b =: g_N & \text{sur } J_+. \end{cases} \quad (3.44)$$

On fait alors appel au lemme suivant, qui établit le comportement asymptotique d'une solution d'un problème mixte sur un domaine à coin plat :

**Lemme 3.4** Soit  $a \in L^p(\mathcal{V})$  solution de (3.44),  $p > 4$ , et  $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$  tel que  $\overline{\mathcal{V}'} \subset \mathcal{V} \cup \partial\mathbb{H}$ . Si  $g_D \in W^{1-\frac{1}{p},p}(J_-)$  et  $g_N \in C^\infty(\overline{J_+})$ , alors  $\exists a_0 \in \mathbb{R}$  tel que

$$a - a_0 r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) \in W^{1,p}(\mathcal{V}') \quad (3.45)$$

où  $(r, \varphi)$  sont les coordonnées polaires centrées en 0, et telles que  $\varphi = 0$  sur  $J_+$  et  $\varphi = \pi$  sur  $J_-$ . Si de plus,  $g_D \in W^{2-\frac{1}{p},p}(J_-)$ , alors  $\exists a_1 \in \mathbb{R}$  tel que

$$a - a_0 r^{\frac{1}{2}} \cos\left(\frac{\varphi}{2}\right) - a_1 r^{\frac{3}{2}} \cos\left(\frac{3\varphi}{2}\right) \in W^{2,p}(\mathcal{V}'). \quad (3.46)$$

(voir [64] pour une preuve et la remarque 3.16 pour des commentaires et d'autres références).

On peut appliquer ce lemme à  $a = \ln(|\phi'|)$ , d'après les étapes précédentes.

On en déduit en premier lieu le développement (3.45) et donc que  $\ln(|\phi'|) \in C^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\mathcal{V}'})$ , régularité de la fonction  $(r, \varphi) \mapsto r^{\frac{1}{2}} \cos(\frac{\varphi}{2})$  (car pour  $p$  assez grand,  $W^{1,p}$  s'injecte dans  $C^{0,\frac{1}{2}}$ ). En appliquant ce raisonnement sur des voisinages de tous les segments de  $\partial\Omega^*$  (de sorte que les voisinages recouvrent toutes les parties strictement convexes), on en déduit que  $\ln(|\phi'|)$  est  $C^{0,\frac{1}{2}}$  sur  $\overline{\mathbb{H}}$ , et par les résultats de [132] (voir aussi le livre [112] qui regroupe les résultats et les références sur ces questions), on en déduit que  $\Omega^*$  est  $C^{1,\frac{1}{2}}$ .

#### Étape 6. Non-régularité supérieure :

D'autre part, si par l'absurde  $\Omega^*$  est  $C^{1,\frac{1}{2}+\varepsilon}$ , alors  $\ln(|\phi'|)$  est de classe  $C^{0,\frac{1}{2}+\varepsilon}$ , donc nécessairement  $a_0 = 0$  dans le développement asymptotique (3.45).

Ainsi  $\ln(|\phi'|) \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{H})$ , mais comme  $|\phi'| \geq \beta > 0$ , cela implique  $|\phi'| \in W_{loc}^{1,p}(\mathbb{H})$ . On peut alors réitérer les étapes 3. à 5. précédentes (avec un cran de régularité en plus, donc on applique la deuxième partie des lemmes 3.3 et 3.4), et obtenir le développement asymptotique (3.46) avec  $a_0 = 0$ . Comme ci-dessus, on en déduit que  $\ln(|\phi'|)$  est  $C^{1,\frac{1}{2}}$  sur  $\mathbb{H}$ , et ainsi  $\Omega^*$  est  $C^{2,\frac{1}{2}}$ . Cela contredit le théorème 3.4.  $\square$

**Remarque 3.13** Un sous-produit de la preuve ci-dessus peut fournir le résultat

$$\gamma \in C^\infty, \quad (3.47)$$

où  $\gamma$  désigne l'ensemble relativement ouvert des parties strictement convexes de  $\partial\Omega^*$  (voir paragraphe 4.2.1).

**Remarque 3.14** Il semble que ce résultat de régularité soit assez surprenant. Rappelons en effet que si l'on considère le problème isopérimétrique

$$P(\Omega^*) = \min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \subset D}} P(\Omega),$$

où  $D$  est assez régulier et  $P$  est la fonction périmètre, la régularité  $C^{1,1}$  a bien lieu (voir [126] et le paragraphe 1.5.1). En dimension 2, ce résultat est assez naturel, puisque le bord de la forme optimale est composé de parties de  $\partial D$  et d'arcs de cercles (les bords libres sont réguliers et ont une courbure constante).

**Remarque 3.15** Le lemme 3.2 établit un résultat de régularité de l'application conforme d'un domaine de classe  $C^1$ . Des résultats dus à Warschawski [132] (voir aussi le livre [112] qui regroupe les résultats et les références sur ces questions), établissent le lien entre la régularité de  $\Omega^*$  et de son application conforme  $\phi$ , dans les espaces de Hölder  $C^{k,\alpha}$  avec  $k \in \mathbb{N}^*$  et  $\alpha \in ]0, 1[$ , et sont adaptés dans [95] aux espaces de Sobolev et dans [105] aux espaces de Besov. Mais pour  $C^1$ , la situation est plus délicate, car nous sommes dans un *mauvais* espace. En effet, pour démontrer les propriétés précédemment citées, on fait essentiellement appel aux étapes suivantes :

1. la régularité de  $\Omega$  donne la régularité de  $Arg(\phi')$  au bord de  $\mathbb{H}$

2. on en déduit la même régularité de  $Arg(\phi')$  sur  $\overline{\mathbb{H}}$ , puisqu'il s'agit d'une fonction harmonique dont on connaît la régularité de la trace,
3. on en déduit la même régularité de  $\ln(|\phi'|)$ , fonction conjuguée de  $Arg(\phi')$ , et par suite la régularité de  $\phi$ .

Les étapes 2 et 3 sont valables dans les *bons* espaces. Par contre, l'étape 3 ne marche pas, par exemple, dans  $L^\infty$  ou  $\mathcal{C}^0$ . C'est pour cela qu'on n'a pas directement  $\phi$  de classe  $\mathcal{C}^1$  (ni même  $\mathcal{C}^{0,1}$ ) dans le lemme 3.2. On fait donc appel à des résultats sur la régularité d'une fonction conjuguée dans  $\mathcal{C}^0$ . On pourra consulter [58, 32] pour une étude approfondie sur le sujet.

**Remarque 3.16** Le lemme 3.4 est un résultat de développement asymptotique pour les solutions d'un problème mixte dans un domaine régulier. En fait, il s'agit d'un cas particulier des résultats de comportement asymptotique pour les solutions d'équations elliptiques, avec condition de Dirichlet et/ou Neumann au bord, dans des domaines possédant des coins (pour nous, le coin est d'ouverture  $\pi$ ). La littérature est très abondante sur ce sujet, on cite par exemple les livres [64] (ne traite pas les polygones curvilignes), [46], et aussi les articles [121, 103, 135, 115, 78, 106] pour quelques résultats liés.

Les énoncés sont techniques, mais l'idée est assez simple : pour un problème mixte sur un domaine régulier, on sait qu'il existe des solutions singulières, même si les données au bord sont régulières, à savoir les fonctions

$$r^{n+\frac{1}{2}} \cos \left( \left( n + \frac{1}{2} \right) \varphi \right), \quad (3.48)$$

où  $(r, \varphi)$  sont les coordonnées polaires au voisinage du point d'intersection de la condition de Dirichlet et de la condition de Neumann, telles que  $\varphi = 0$  sur le côté de la condition de Neumann, et  $\varphi = \pi$  sur le côté de la condition de Dirichlet, et  $n \in \mathbb{Z}$  (les valeurs de  $n$  négatives sont exclues si l'on considère des solutions dans  $H^1$ ).

Et surtout, on sait que toute solution admet un développement asymptotique au voisinage du point de concours des conditions de Dirichlet et de Neumann, ce développement étant somme de ces solutions singulières. Ainsi, on a un développement à un certain ordre, déterminé par la régularité maximale que l'on peut espérer avec les conditions au bord, et cette régularité sera celle du reste dans le développement.

En particulier, le résultat est énoncé pour une fonction de  $L^p$  avec  $p > 4$ , et pas seulement dans  $H^1$ . Cela mérite une justification, puisque si l'on n'est plus dans  $H^1$ , on n'a pas de formulation variationnelle nous permettant d'avoir un problème bien posé. Néanmoins, le défaut d'unicité *en dessous de  $H^1$*  est connu pour ces problèmes : on sait que toute solution reste combinaison linéaire de solutions singulières du type (3.48). Celles-ci sont éliminées dès que notre solution est dans un  $L^p$  avec  $p > 4$  (car alors  $r^{-\frac{1}{2}}$  n'est plus dans  $L^p$ ), on a donc unicité dans cet espace (voir par exemple [121]).

### 3.3.3 A propos de l'hypothèse géométrique (3.37)

Nous avons pu nous affranchir de toute hypothèse de régularité pour le théorème 3.2. En ce qui concerne la propriété géométrique (3.37), sur la saturation de la contrainte de convexité, nous ne sommes pas en mesure de nous passer de celle-ci. Néanmoins, on est en mesure d'écrire des conditions d'optimalité généralisées, basées sur l'approche du chapitre 2. Nous décrivons dans ce paragraphe la démarche pour les obtenir.

Le point de départ de l'étude consiste à démontrer que la valeur propre  $\lambda_2$  est simple en un domaine optimal, afin de pouvoir dériver. Nous n'avons pas été en mesure de trouver une adaptation de la preuve de A. Henrot et E. Oudet sans l'hypothèse géométrique d'existence d'une partie strictement convexe. Néanmoins, nous avons réussi à contourner la difficulté en nous ramenant à une formulation équivalente à (3.32), posée sur  $\lambda_1$ , qui est toujours simple pour un domaine ouvert connexe (et donc différentiable pour un tel ouvert) :

**Proposition 3.6** Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32), et  $u_2$  une seconde fonction propre sur  $\Omega^*$ .

On pose  $\Omega_- = \{x \in \Omega / u_2(x) < 0\}$ ,  $\Omega_+ = \{x \in \Omega / u_2(x) > 0\}$ , et  $\mathcal{N} = \{x \in \Omega / u_2(x) = 0\}$ .

Alors  $\Omega_+$  est solution du problème d'optimisation suivant :

$$\lambda_1(\Omega_+) = \min_{\substack{\omega \cap \overline{\Omega_-} = \emptyset \\ |\omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-| = V_0 \\ \omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_- \text{ convexe}}} \lambda_1(\omega). \quad (3.49)$$

De plus  $u_2|_{\Omega_+}$  est une première fonction propre du laplacien avec condition de Dirichlet sur  $\Omega_+$ , et  $\lambda_1(\Omega_+) = \lambda_2(\Omega^*)$ .

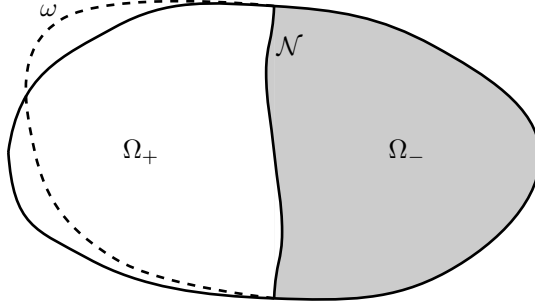


FIG. 3.4 – Ensembles nodaux de  $u_2$

Autrement dit,  $\Omega_+$  est optimal pour  $\lambda_1$ , parmi les domaines  $\omega$  tels que  $\omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-$  satisfait les contraintes du problème (3.32).

**Preuve :** On sait que  $\Omega_{\pm}$  sont connexes. Soit  $\omega$  tel que  $\omega \cap \overline{\Omega_-} = \emptyset$ ,  $\omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-$  soit convexe, et  $|\omega \cup \Omega_-| = V_0$ .

Supposons par l'absurde que  $\lambda_1(\omega) < \lambda_1(\Omega_+) = \lambda_1(\Omega_-) = \lambda_2(\Omega^*)$  (on obtient ces dernières égalités car  $u_2 \in H_0^1(\Omega_{\pm})$  et est une fonction propre de signe constant sur  $\Omega_{\pm}$ ). Alors

$$\lambda_2(\omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-) \leq \lambda_2(\omega \cup \Omega_-) \leq \max\{\lambda_1(\omega), \lambda_1(\Omega_-)\} \leq \lambda_2(\Omega^*).$$

Dans ce cas, on peut trouver une perturbation  $\omega^\varepsilon, \mathcal{N}^\varepsilon, \Omega_-^\varepsilon$ , telle que  $\omega^\varepsilon \cup \mathcal{N}^\varepsilon \cup \Omega_-^\varepsilon = \omega \cup \mathcal{N} \cup \Omega_-$  et

$$\lambda_1(\omega) < \lambda_1(\omega^\varepsilon) < \lambda_1(\Omega_-^\varepsilon) < \lambda_1(\Omega_-).$$

En effet, il existe  $x_0 \in \mathcal{N}$  et  $\varepsilon_0 > 0$  tels que  $\forall \varepsilon < \varepsilon_0, B_{2\varepsilon}(x_0) \subset \overline{\omega \cup \Omega_-}$ . Alors, si  $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ ,  $B_\varepsilon(x_0) \cap \omega$  et  $B_\varepsilon(x_0) \cap \Omega_-$  sont non vides (donc de mesure non nulle, puisqu'ils sont ouverts).

On pose alors  $\omega^\varepsilon = \omega \cup (\Omega_- \cap B_\varepsilon(x_0))$  et  $\Omega_-^\varepsilon = \Omega_- \setminus B_\varepsilon(x_0)$  et on vérifie qu'ils sont encore connexes (voir figure 3.5). Avec le lemme 3.1 de croissance stricte de  $\lambda_1$ ,  $\lambda_1(\omega^\varepsilon) > \lambda_1(\omega)$  et  $\lambda_1(\Omega_-^\varepsilon) < \lambda_1(\Omega_-)$ , car on a perturbé par des ensembles de mesure non nulle (et donc de capacité non nulle).

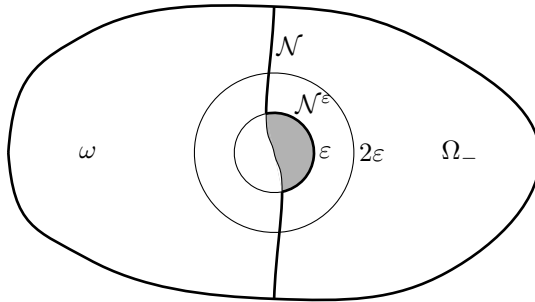


FIG. 3.5 – Lemme de perturbation

Enfin, pour  $\varepsilon$  assez petit, on a  $\lambda_1(\omega^\varepsilon)$  (resp.  $\lambda_1(\Omega_-^\varepsilon)$ ) proche de  $\lambda_1(\omega)$  (resp.  $\lambda_1(\Omega_-)$ ), d'après la continuité de  $\lambda_1$ , donc on a aussi  $\lambda_1(\omega^\varepsilon) < \lambda_1(\Omega_-^\varepsilon)$ . Mais alors,

$$\lambda_2(\omega^\varepsilon \cup \mathcal{N}^\varepsilon \cup \Omega_-^\varepsilon) \leq \lambda_2(\omega^\varepsilon \cup \Omega_-^\varepsilon) \leq \max\{\lambda_1(\omega^\varepsilon), \lambda_1(\Omega_-^\varepsilon)\} < \lambda_1(\Omega_-) = \lambda_2(\Omega^*)$$

Cela contredit la minimalité de  $\Omega^*$  pour (3.32), puisque  $\omega^\varepsilon \cup \mathcal{N}^\varepsilon \cup \Omega_-^\varepsilon$  est convexe de volume  $V_0$ .  $\square$

En conséquence, on peut écrire les conditions d'optimalité pour le problème (3.49), pour lequel la fonctionnelle est toujours différentiable. Il faut juste faire attention à satisfaire les contraintes pour les perturbations : ainsi on doit utiliser des perturbations qui sont à support dans  $\partial\Omega_+ \setminus \mathcal{N}$ . Le même raisonnement vaut pour les perturbations à support dans  $\partial\Omega_- \setminus \mathcal{N}$ .

On est maintenant en mesure d'énoncer le résultat suivant, qui reprend l'idée du chapitre 2 (cf. propositions 2.3.2 et 2.3.3) et dont nous donnons les grandes lignes de la preuve :

**Théorème 3.6** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.32), et notons  $u_2$  une seconde fonction propre sur  $\Omega^*$ . On choisit des coordonnées polaires centrées en un point  $O$  de  $\Omega^*$ . On note  $v_0(\theta)$  l'inverse de la fonction distance entre  $O$  et le point de  $\partial\Omega^*$  d'angle polaire  $\theta$ . Alors il existe  $\zeta_0 \in H^1(\mathbb{T})$  positif tel que*

$$\begin{cases} |\nabla u_2|_{|\partial\Omega}(\theta) = \Lambda + v_0^3(\theta)(\zeta_0'' + \zeta_0)(\theta), \quad \forall \theta \in \mathbb{T} \\ \zeta_0 = 0 \text{ sur } S_{v_0} \end{cases} \quad (3.50)$$

où  $S_{v_0}$  est le support de la mesure  $v_0'' + v_0$ , et  $\Lambda$  la constante introduite au théorème 3.2.

**Remarque 3.17** Si l'on se place sur  $\gamma \subset \partial\Omega^*$ , l'ensemble relativement ouvert des parties strictement convexes du bord, alors comme on l'a dit à la remarque 3.7, le gradient de  $u_2$  est continu sur  $\gamma$ , donc  $\zeta_0$  est  $\mathcal{C}^2$  sur  $I \subset \mathbb{T}$  tel que  $\frac{1}{v_0}(I) = \gamma$ . Mais comme ces parties sont dans le support de  $v_0'' + v_0$ ,  $\zeta_0$  y est nul, et donc on retrouve le résultat de [72] sur les parties strictement convexes (équation (3.38)).

**Preuve :** On calcule la dérivée de  $j(v) = \lambda_2(\Omega_v)$ , avec les notations du chapitre 2. En notant  $\xi_r(\frac{1}{v}(\theta), \theta) = r(\theta)e^{i\theta}$  en coordonnées polaires, on obtient

$$j'(v).w = \lambda_2'(\Omega_v).\xi_{-w/v^2} = \int_{\mathbb{T}} |\nabla u_2|^2 \frac{w}{v^3} d\theta.$$

On applique l'approche du chapitre 2, et on obtient le résultat. Il faut juste s'affranchir de deux difficultés :

1. la fonction  $v \mapsto \lambda_2(\Omega_v)$  est a priori différentiable dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})$  (il n'est pas clair qu'elle le soit dans  $H^1(\mathbb{T})$ ), donc on obtient un multiplicateur de Lagrange dans  $W^{1,\infty}(\mathbb{T})''$ , mais l'équation d'optimalité lie la régularité de la fonction propre  $u_2$  ( $|\nabla u_2|_{\partial\Omega^*} \in H^{\frac{1}{2}}(\partial\Omega^*)$ ) à celle de ce multiplicateur de Lagrange, qui peut donc être représenté par  $\zeta_0 \in H^1(\mathbb{T})$  (on a même  $\zeta_0'' \in H^{\frac{1}{2}}(\mathbb{T})$ )
2. comme on ne sait pas que  $\lambda_2(\Omega^*)$  est simple, on utilise la proposition 3.6. Pour cela, on doit effectuer des déformations qui ne touchent pas les deux points de la ligne nodale, donc on ajoute des contraintes dans l'analyse, ce qui fournit des multiplicateurs de Lagrange supplémentaires portés par ces deux points, pour gérer ces contraintes ; mais encore une fois, l'équation d'Euler-Lagrange interdit des multiplicateurs portés en un point, ceux-ci sont donc nécessairement nuls.

□

### 3.4 Minimisation de $\lambda_1$ : régularité au bord de la boîte

On s'intéresse ici à la régularité de la forme optimale du problème

$$\lambda_1(\Omega^*) = \min_{\substack{|\Omega|=v_0 \\ \Omega \subset D}} \lambda_1(\Omega), \quad (3.51)$$

où  $D = \mathbb{R} \times ]-a, a[$  est une bande infinie. On a déjà traité la question de la régularité des frontières libres  $\partial\Omega^* \cap D$  au paragraphe 3.2. Il se trouve que, pour ce choix de boîte  $D$ , les démarches employées au paragraphe 3.3 s'adaptent et fournissent des résultats similaires, en particulier la régularité  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$  au point de raccordement de  $\partial\Omega^*$  avec  $\partial D$ .

Il n'y a pas ici de contrainte de convexité. De plus, le problème de la simplicité de  $\lambda_1(\Omega^*)$  ne se pose pas, puisqu'il est facile de voir que  $\Omega^*$  est connexe. Pour ces raisons, certains aspects



du problème (3.51) sont plus simples que ceux du (3.32). Par contre, la difficulté majeure de ce problème consiste à avoir un peu de régularité (alors que pour le problème (3.51), on part avec la régularité issue de la convexité). Ce travail a été effectué dans le paragraphe 3.2 pour les bords libres. Il ne nous semble pas qu'il y ait dans la littérature de résultat sur la régularité de la forme  $\Omega^*$  jusqu'au bord de la boîte. Citons [11, 119, 101, 120, 77] pour des résultats de contact tangentiel pour le problème de l'obstacle.

Précisément, on montre dans ce paragraphe le résultat suivant :

**Théorème 3.7** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.51). On suppose que le contact entre  $\Omega^*$  et le bord de  $D$  est tangentiel et hölderien pour un exposant  $\alpha > 0$ . Alors*

- *soit  $\Omega^*$  est une boule,*
- *soit  $\Omega^*$  est de classe  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$ , mais  $\forall \varepsilon > 0$ ,  $\Omega^*$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2} + \varepsilon}$ .*

La démarche est donc la suivante : on peut établir, à partir des résultats de régularité du paragraphe 3.2, une équation d'Euler-Lagrange du type :

$$\begin{cases} -\Delta u_1 &= \lambda_1(\Omega^*)u_1 & \text{dans } \Omega^*, \\ u_1 &= 0 & \text{sur } \partial\Omega^*, \\ |\nabla u_1| &= \Lambda & \text{sur } \partial\Omega^* \cap D. \end{cases} \quad (3.52)$$

où  $u_1$  est la première fonction propre sur  $\Omega^*$ .

Par la même approche que pour le théorème 3.5, on démontre que  $\Omega^*$  est  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$  ou  $\mathcal{C}^{2, \frac{1}{2}}$ . Mais on peut adapter le résultat de non-régularité de A. Henrot et E. Oudet (théorème 3.4) pour le problème (3.51), afin d'exclure ce dernier cas.

### 3.4.1 Résultat de non-régularité $\mathcal{C}^2$

Voici l'équivalent du théorème 3.4 pour le problème (3.51) :

**Théorème 3.8** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.51). On suppose que  $\partial\Omega^*$  touche le bord de  $D$  sur un intervalle non réduit à un point.*

*Alors pour tout  $\varepsilon > 0$ ,  $\Omega^*$  n'est pas de classe  $\mathcal{C}^{2, \varepsilon}$ .*

**Remarque 3.18** Plus précisément, il est démontré qu'on ne peut pas avoir  $u_1 \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega^*})$ . La démonstration que nous faisons est spécifique à la boîte  $D$  choisie, c'est-à-dire une bande infinie.

**Remarque 3.19** Le fait que  $\partial\Omega^*$  touche le bord de  $D$  sur un intervalle non vide est équivalent au fait que  $D$  ne contienne pas de disque de volume  $V_0$ . En effet, si un tel disque existe, il est solution, unique à translation près (et ensemble de capacité nulle près). Et inversement si  $\Omega^*$  est solution et ne touche pas le bord en plus d'un point, alors par les résultats de régularité, on a une équation d'Euler-Lagrange du type (3.52) sur tout le bord, sauf éventuellement en 2 points (car le disque peut être tangent à la boîte). Par le résultat d'unicité de Serrin (voir [118] ou le chapitre 4), qui est aussi valable dans le cas épointé (voir [113]), la solution est alors une boule. Enfin, on est sûr que  $\Omega^*$  touche le bord de  $D$  en un intervalle, car on peut montrer que  $\Omega^*$  est Steiner-symétrique par rapport aux axes  $OX$  et  $OY$  (voir proposition 3.7). Voir le corollaire 3.1

Commençons donc par montrer les propriétés de symétries des formes optimales, qui nous serviront pour la suite.

**Proposition 3.7** *Soit  $\Omega^*$  solution de (3.51). Alors  $\Omega^*$  est Steiner-symétrique par rapport aux axes  $OX$  et  $OY$  (à translation horizontale près).*

**Preuve :** On pose  $\widetilde{\Omega^*} = S_Y S_X(\Omega^*)$ , où  $S_X$  et  $S_Y$  sont les symétrisations de Steiner selon les axes  $OX = \mathbb{R} \times \{0\}$  et  $OY = \{0\} \times \mathbb{R}$ , respectivement (voir [79] ou [73] pour une introduction à cette notion).

Comme  $D$  est Steiner-symétrique par rapport à  $OX$  et  $OY$ ,  $\widetilde{\Omega^*}$  reste dans  $D$ . Par résultats classiques sur la symétrisation de Steiner, l'aire est préservée et la première valeur propre décroît :

$\lambda_1(\widetilde{\Omega}^*) \leq \lambda_1(\Omega^*)$  (on utilise la positivité de la fonction propre pour cette propriété). Ainsi,  $\widetilde{\Omega}^*$  est solution du problème d'optimisation de forme (3.51) et par minimalité de  $\Omega^*$ ,

$$\lambda_1(\widetilde{\Omega}^*) = \lambda_1(\Omega^*).$$

Avec le lemme géométrique 3.5 qui suit, on sait que  $\widetilde{\Omega}^*$  est Steiner-symétrique par rapport à  $OX$  et  $OY$ .

Il reste à voir que  $\widetilde{\Omega}^* = \Omega^*$ . Cette question délicate est la question du cas d'égalité dans la symétrisation de Steiner : on cite [39] pour une caractérisation de ces cas d'égalité. Nous pouvons appliquer leurs résultats, grâce aux régularités démontrées sur les bords libres de  $\Omega^*$ .  $\square$

**Lemme 3.5** *Soit  $\Omega$  un ensemble mesurable borné de  $\mathbb{R}^2$ , et  $OX$ ,  $OY$  deux axes orthogonaux. Alors  $S_Y S_X(\Omega^*)$  est encore Steiner-symétrique par rapport à  $OX$ .*

**Preuve :** On peut écrire  $S_X(\Omega) = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} I(y) \times \{y\}$  où  $I(y) = \{x \in \mathbb{R} / (x, y) \in S_X(\Omega)\}$ .

On pose  $l(y) = \mathcal{L}^1(I(y))$  (où  $\mathcal{L}^1$  est la mesure de Lebesgue 1-dimensionnelle).

D'après la symétrie de  $S_X(\Omega)$  selon  $OX$ ,  $l(y) = l(-y)$ . Étudions maintenant les variations de  $l$ .

Si  $0 \leq y_1 \leq y_2$  et  $x \in I(y_2)$ , d'après la Steiner-symétrie de  $S_X(\Omega)$  dans la direction  $OX$ ,  $[(x, -y_2), (x, y_2)] \subset S_X(\Omega)$ . Ainsi,  $(x, y_1) \in \Omega$ , et donc  $I(y_2) \subset I(y_1)$  et  $l(y_2) \leq l(y_1)$ . De la parité de  $l$ , on déduit la propriété

$$\forall |y_1| \leq |y_2|, l(y_1) \geq l(y_2).$$

En conséquence,  $\widetilde{\Omega} := S_Y(S_X(\Omega)) = \bigcup_{y \in \mathbb{R}} J(y) \times \{y\}$  avec  $J(y) = (-\frac{|l(y)|}{2}, \frac{|l(y)|}{2})$  symétrique par rapport à  $OX$ . Il reste à voir que  $\widetilde{\Omega}$  est convexe dans la direction  $X$ , c'est-à-dire

$$\forall (x, y_1), (x, y_2) \in \widetilde{\Omega}^2, [(x, y_1), (x, y_2)] \subset \widetilde{\Omega}.$$

Soit  $(x, y_1) \in \widetilde{\Omega}$ , i.e.  $|x| < \frac{|l(y_1)|}{2}$ , et soit  $|y_2| \leq |y_1|$ . Alors  $|x| < \frac{|l(y_2)|}{2}$ , et donc  $(x, y_2) \in \widetilde{\Omega}$ , ce qui conclut ce lemme.  $\square$

Comme on l'a dit à la remarque 3.19, on obtient donc :

**Corollaire 3.1** *Si  $\Omega^*$  est solution de (3.51), alors*

- soit  $\Omega^*$  est un disque de volume  $V_0$ ,
- soit  $\Omega^*$  touche les deux bords de  $D$  en deux segments opposés non vides.

**Preuve du théorème 3.8 :** On adapte la méthode utilisée dans [72, Théorème 10] (rappelé au théorème 3.4).

Supposons pour l'instant que  $u_1$ , première fonction propre du laplacien, est  $\mathcal{C}^1$  sur  $\overline{\Omega^*}$ .

On note  $\partial^- \Omega^*$  (resp.  $\partial^+ \Omega^*$ ) la partie de  $\partial \Omega^*$  qui se trouve à gauche (resp. à droite) de l'axe vertical de symétrie.

**Lemme 3.6** *Soit  $\omega$  une composante connexe de l'ouvert  $[\partial_x u_1 > 0]$  (resp. de  $[\partial_x u_1 < 0]$ ). Alors  $\partial \omega \cap \partial^- \Omega^* \neq \emptyset$  (resp.  $\partial \omega \cap \partial^+ \Omega^* \neq \emptyset$ ).*

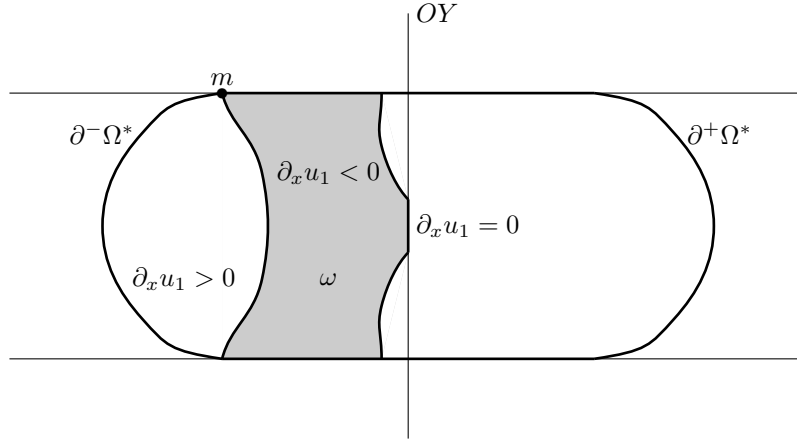
Nous montrons ce lemme ci-dessous. Voyons pour le moment comment en déduire le théorème 3.8.

On désigne par  $m$  le point le plus à gauche de  $\partial \Omega^* \cap \partial D$ . On suppose qu'il ne se trouve pas sur l'axe de symétrie (voir remarque 3.19). Si alors on suppose que  $u_1 \in \mathcal{C}^2$  au point  $m$ , on a  $\partial_{xx} u_1(m) = 0$  (par dérivation horizontale) et, par dérivation sur la partie strictement convexe,

$$0 = \partial_{\tan g}((\partial_x u_1)^2 + (\partial_y u_1)^2)(m) = 2\partial_y u_1(m)\partial_{xy} u_1(m).$$

Comme  $\partial_y u_1(m) \neq 0$ , on en déduit  $\partial_{xy} u_1(m) = 0$ .

En conséquence, et aussi parce que  $\partial_x u_1(m) = 0$ , par principe du maximum fort, on ne peut avoir, ni  $\partial_x u_1 \geq 0$  dans tout un voisinage de  $m$ , ni  $\partial_x u_1 \leq 0$  dans tout un voisinage de  $m$  (sinon, on aurait respectivement  $\partial_y(\partial_x u_1)(m) < 0$  ou  $\partial_y(\partial_x u_1)(m) > 0$ ). Le point  $m$  est donc adhérent à la fois à  $[\partial_x u_1 > 0]$  et à  $[\partial_x u_1 < 0]$ . On en conclut que la fonction propre  $u_1$  ne peut pas être  $\mathcal{C}^2$  en  $m$  : comme  $\Omega^*$  est Steiner-symétrique (au moins horizontalement), la fonction propre  $u_1$  vérifie

FIG. 3.6 – Utilisation du caractère  $C^2$  en  $u$ 

$u_1(-x, y) = u_1(x, y)$  puisque  $(x, y) \rightarrow u_1(-x, y)$  est aussi fonction propre et, par connexité de  $\Omega$ , il y a unicité de la première fonction propre. Ainsi  $\partial_x u_1(0, y) = 0$  pour tout  $y$ . D'après la remarque ci-dessus, si  $u_1$  est  $C^2$  en  $m$ , il existe au moins une composante connexe  $\omega$  de  $[\partial_x u_1 < 0]$  qui a des points dans le voisinage de  $m$ . Puisque  $\omega \cap [\partial_x u_1 = 0] = \emptyset$ , par connexité, on a nécessairement  $\omega \subset \{(x, y) \in \Omega; x < 0\}$ . Ainsi  $\partial\omega \cap \partial^+\Omega^* = \emptyset$ , ce qui est en contradiction avec le lemme 3.6.  $\square$

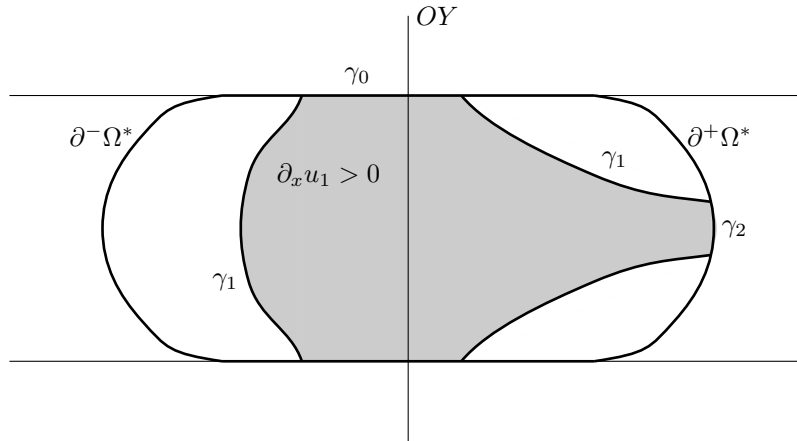
**Preuve du lemme 3.6 :** Supposons par l'absurde que  $\partial\omega \cap \partial^-\Omega^* = \emptyset$  où  $\omega$  est une composante connexe de  $[\partial_x u_1 > 0]$ .

Alors,  $\partial_x u_1 = 0$  sur  $\partial\omega$  : en effet, on peut écrire  $\partial\omega = \gamma_0 \cup \gamma_1 \cup \gamma_2$  selon la décomposition suivante :

- $\gamma_0 = \partial\omega \cap \partial D$  : mais  $u_1 = 0$  sur  $\partial D$  et donc  $\partial_x u_1 = 0$  aussi.
- $\gamma_1 = \partial\omega \cap \Omega^*$  : tout point de  $\gamma_1$  est alors adhérent à une suite de points  $x_n$  en lesquels  $\partial_x u_1(x_n) \leq 0$  et donc  $\partial_x u_1 = 0$  sur  $\gamma_1$  par continuité.
- $\gamma_2 = \partial\omega \cap \partial^+\Omega^*$  : si  $(x, y) \in \partial^+\Omega^*$ , on a, pour  $h > 0$  petit,  $(x - h, y) \in \Omega^*$  d'après la propriété de Steiner-symétrie, et donc :

$$u_1(x - h, y) - u_1(x, y) = u_1(x - h, y) \geq 0 \text{ et donc } \partial_x u_1(x, y) \leq 0.$$

Cela, couplé avec le fait que  $\partial_x u_1 > 0$  dans  $\omega$ , prouve encore que  $\partial_x u_1 = 0$  sur  $\gamma_2$ . Ainsi,  $\partial_x u_1$  est

FIG. 3.7 – Composante de  $[\partial_x u_1 > 0]$ 

fonction propre pour le Laplacien avec donnée de Dirichlet nulle au bord de  $\omega$ , et pour la valeur propre  $\lambda_1(\Omega^*)$  (car elle est continue sur  $\bar{\omega}$ , nulle au bord, et vérifie  $-\Delta \partial_x u_1 = \lambda_1(\Omega) \partial_x u_1$  au sens

des distributions dans l'ouvert  $\omega$ ), soit  $\lambda_1(\omega) = \lambda_1(\Omega^*)$ . Cela est contradictoire avec le lemme 3.1 de monotonie stricte de la première valeur propre.

Le raisonnement est le même pour les composantes connexes de  $[\partial_x u_1 < 0]$ .  $\square$

### 3.4.2 Régularité de la forme optimale

**Preuve du théorème 3.7 :** Comme pour le cas de la minimisation de  $\lambda_2$ , on doit s'assurer, pour faire fonctionner la démonstration du paragraphe 3.3.2, qu'il n'y a pas alternance infinie de parties libres (i.e. surdéterminées  $\partial\Omega^* \cap D$ ) et de parties non-surdéterminées (i.e. des segments  $\partial D \cap \partial\Omega^*$ ). Cela est une conséquence de la symétrie de  $\Omega^*$  montrée à la proposition 3.7. On sait aussi, par cette symétrie, que  $\Omega^*$  touche  $\partial D$  en des segments non réduits à un point, s'il n'est pas une boule (Corollaire 3.1).

Une fois ces propriétés géométriques obtenues, la preuve du paragraphe 3.3.2.3 s'applique (car on a le théorème 3.8), avec les adaptations minimales suivantes (voir le paragraphe 4.2.2 pour une preuve complète pour des situations plus générales) :

1. pour passer au logarithme la régularité de la fonction  $|\phi'|$ , on a eu besoin de montrer que celle-ci ne s'annulait pas (ce qui était fourni par la convexité). Cela est vrai car, par l'hypothèse sur la régularité du contact entre  $\Omega^*$  et la boîte,  $\Omega^*$  est globalement  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$ , ce qui implique que  $|\phi'|$  ne s'annule pas (voir [112]),
2. on n'a pas  $u_1 \in H^2(\Omega^*)$  a priori (qui était obtenu par la convexité), mais cela n'a pas été utilisé dans la démonstration. Pour appliquer le lemme 3.4, on a juste besoin de  $\ln(|\phi'|) \in L^p$  pour  $p$  assez grand. Dans le chapitre 4, on détaillera l'approche en raisonnant sur les espaces de Hölder plutôt que sur les espaces de Sobolev, moins adaptée dans cette situation (mais qui convient quand même).

**Remarque 3.20** On peut essayer d'affaiblir l'hypothèse de contact hölderien, en un contact seulement  $\mathcal{C}^1$ . La difficulté est alors de montrer que  $|\phi'|$  ne s'annule pas. La convexité fournit cette propriété, mais il semble encore ouvert que la forme optimale minimisant  $\lambda_1$  dans une boîte convexe, soit convexe.

## 3.5 Simulations numériques

Nous avons souhaité observer numériquement les résultats de non-régularité qui précèdent. Nous avons calculé un domaine approchant une forme optimale de

$$\min_{\Omega \subset D} \left\{ J(\Omega) := \lambda_1(\Omega) + \mu (|\Omega| - V_0)^2 \right\},$$

où  $D = \mathbb{R} \times ]-\alpha, \alpha[$ , et  $\mu > 0$ . Ainsi, nous n'avons pas de contrainte de convexité (difficile à traiter numériquement), et la contrainte de volume est en partie prise en compte par pénalisation.

Pour ce problème (même avec  $\mu$  petit), les conditions d'optimalité sont semblables à celles des problèmes (3.32) et (3.51), et on s'attend à la même régularité des formes optimales, à savoir  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$  si elles touchent le bord de  $D$ .

### Méthode numérique :

Nous avons programmé une méthode de gradient classique pour ce problème. La contrainte d'inclusion dans la boîte est gérée par une méthode de projection. Précisément :

1. Initialisation : On choisit une forme initiale  $\Omega_0$  incluse dans  $D$ ,
2. Itération :
  - La forme  $\Omega_k$  étant donnée, on calcule  $\mathcal{L}_{\Omega_k}^J = -|\nabla u_{\Omega_k}|^2 + 2\mu (|\Omega_k| - V_0)$ , où  $u_{\Omega_k}$  est la première fonction propre normalisée sur  $\Omega_k$ .
  - On choisit la direction de descente  $\xi_k = (|\nabla u_{\Omega_k}|^2 - 2\mu (|\Omega_k| - V_0)) \nu_{\Omega_k}$ .
  - $\Omega_{k+1} = P_D((Id + h\xi_k)(\Omega_k))$  où  $P_D$  est l'opérateur de projection sur la contrainte  $\Omega \subset D$ , et  $h$  un pas de descente (que nous avons choisi fixe).

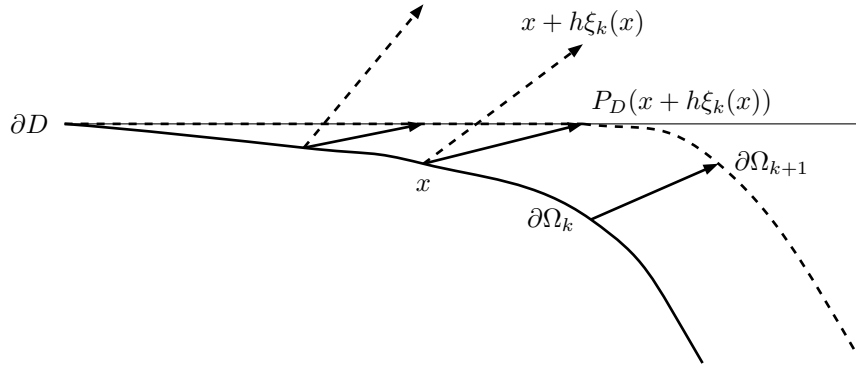
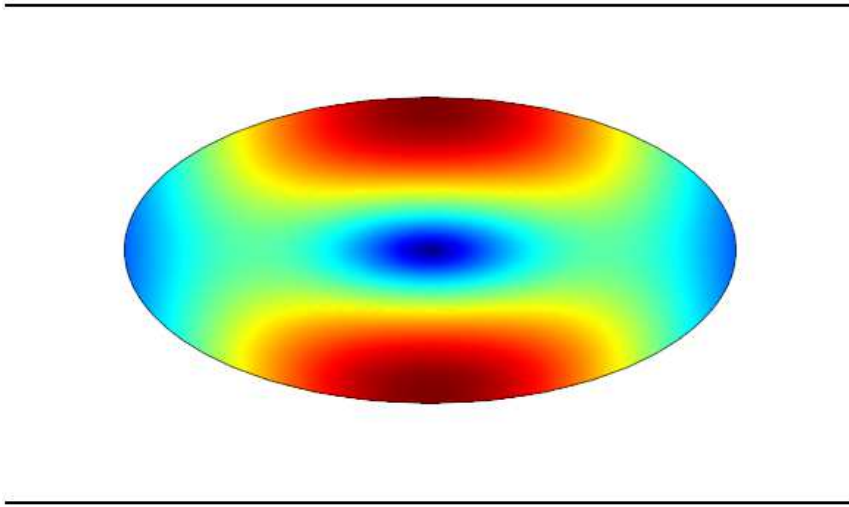


FIG. 3.8 – Perturbation au voisinage de la boîte

### Détails de l'implémentation :

Nous avons utilisé des logiciels de calculs d'éléments finis. Initialement, nous avons travaillé avec FreeFem++ (voir par exemple [2]), mais comme nous cherchions des informations très précises sur la géométrie du bord et sur la trace du gradient au bord du domaine, nous avons ensuite implémenté nos algorithmes avec le logiciel Comsol, qui permet d'avoir des représentations d'ordre 2 du bord (le logiciel ne permet pas de déformation de frontière d'ordre plus élevé). Nous présentons les résultats obtenus : sur la figure 3.9, la forme initiale choisie, et sur la figure 3.10 la forme obtenue après 35 itérations. Dès l'étape 35, on n'observe plus, à l'œil nu, de modification de la frontière. Mais on peut observer que l'algorithme progresse encore en calculant la trace de  $|\nabla u_{\Omega_k}|$  au bord du domaine (qu'on devine déjà relativement constant sur les bords libres sur la figure 3.10). Ainsi, on obtient à l'étape 60, le graphe de  $|\nabla u_{\Omega_k}|_{|\partial\Omega_k}$  en fonction de l'abscisse curviligne (voir figure 3.11).

Paramètres pour les figures 3.9, 3.10 et 3.11 :  $h = 0.02$ ,  $V_0 = 13$ ,  $\mu = 5$ ,  $\alpha = 1.6$ .

FIG. 3.9 – Forme initiale ; représentation de  $|\nabla u_{\Omega_0}|$  ; Énergie=117

### Identification de la régularité

On va s'intéresser à la régularité de la forme au voisinage d'un point de contact entre un bord libre et le bord de la boîte  $D$ . On voit à l'œil nu que le contact est de classe  $\mathcal{C}^1$ , mais nous allons approfondir l'analyse de la forme optimale, et retrouver le comportement qui a été obtenu

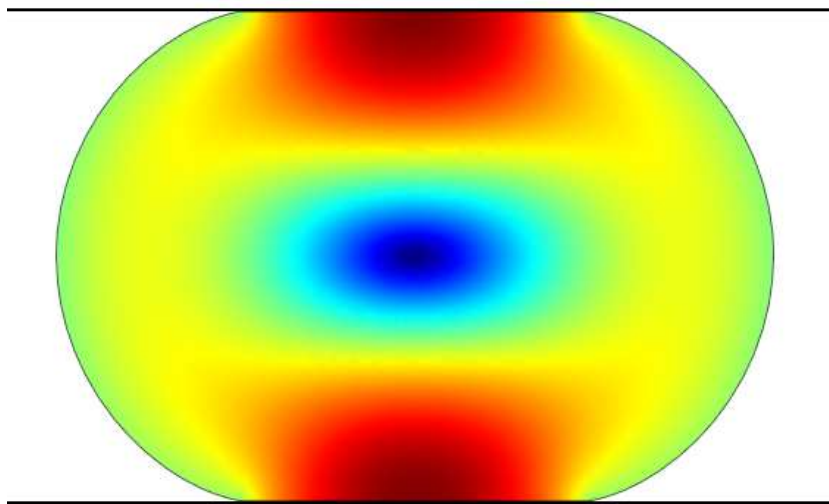


FIG. 3.10 – Étape 35 ; représentation de  $|\nabla u_{\Omega_{35}}|$  ; Énergie=1.5006

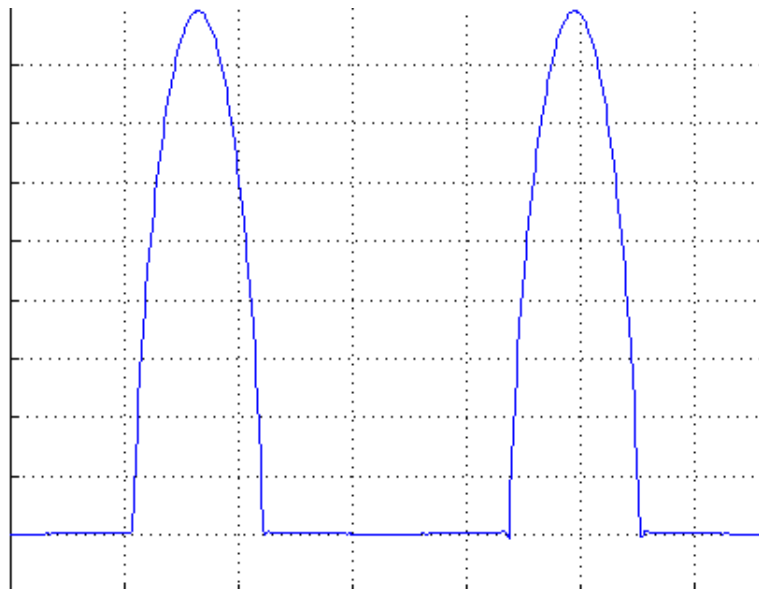


FIG. 3.11 – Étape 60 : trace de  $|\nabla u_{\Omega_{60}}|_{|\partial\Omega_{60}}$

théoriquement dans les paragraphes précédents.

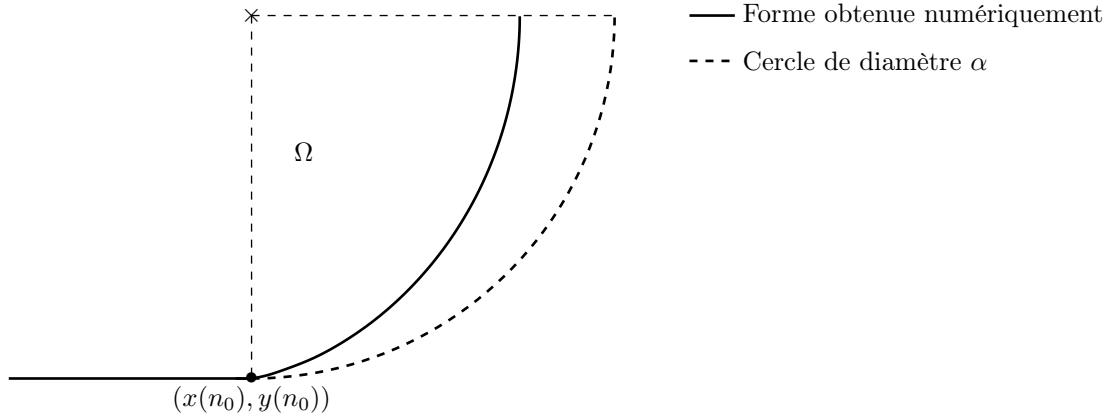


FIG. 3.12 – Quartier en bas à droite de la forme

Comme la non-régularité est localisée en un point, il n'est pas très difficile d'analyser le comportement de la forme en ce point (alors que la question de déterminer numériquement la régularité globale d'une courbe, est en général difficile).

La méthode est la suivante : on extrait le graphe de la forme obtenue, par exemple à l'étape 60 : on obtient les points  $(x(n), y(n))$ , représentant par exemple le quadrant en bas à droite de la forme (voir figure 3.12). On cherche les coordonnées du point de contact  $(x(n_0), y(n_0))$ , et on calcule

$$(\ln(x(n) - x(n_0)), \ln(y(n) - y(n_0))) \text{ pour } n > n_0.$$

On observe que pour  $n$  assez proche de  $n_0$ , cette courbe est à peu près linéaire, et avec une régression linéaire, on calcule  $\beta$  son coefficient directeur (voir figure 3.13).

La détermination du point de contact (donc de  $n_0$ ) est assez délicate. Pour cela, on fixe  $\varepsilon > 0$ , et on cherche le premier indice  $n_0$  tel que

$$|y(n_0) + \alpha| > \varepsilon.$$

On ne prend pas  $\varepsilon = 0$  à cause des erreurs numériques ; si  $\varepsilon$  est trop petit, on risque d'obtenir un point trop à *gauche* du bon point (voir figure 3.12), et le calcul au voisinage de ce point fournira

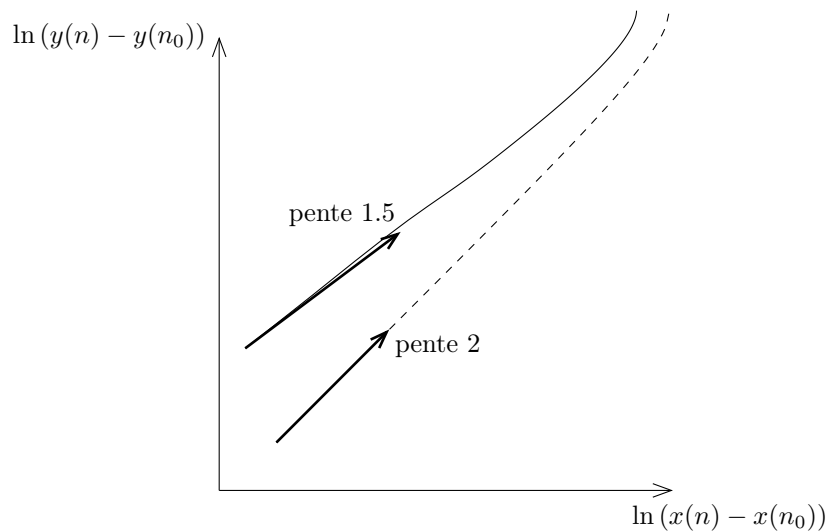


FIG. 3.13 – Représentation graphique logarithmique de la forme (et de l'arc de cercle)

de mauvais résultats; à l'inverse, s'il est trop grand, on s'éloigne du point qui nous intéresse, et le calcul que nous effectuons n'est alors pas représentatif de la singularité que nous souhaitons identifier.

En pratique, nous avons pris  $\varepsilon$  de l'ordre de  $10^{-3}$ , ce qui est significativement petit par rapport à la largeur du domaine (environ égale à 3 dans notre cas). Des valeurs un peu plus grandes de  $\varepsilon$  fournissent aussi de bons résultats. Cela peut s'expliquer avec la figure 3.13 : en effet, la courbe est linéaire pour de nombreuses valeurs de  $n$ , même assez loin de  $n_0$ , indice du point de contact, donc le comportement singulier n'est pas très localisé, ce qui autorise des valeurs de  $\varepsilon$  assez grandes.

## Résultats

Nous avons obtenu l'estimation numérique  $\beta = 1.52$ , coefficient directeur de la portion de droite représentée à la figure 3.13, correspondant à la 60<sup>e</sup> itération. Pour plus de précision, nous avons représenté les estimations de  $\beta$  au cours des itérations, et nous obtenons le graphe de la figure 3.14. Au départ, les estimations de  $\beta$  oscillent entre 1 et 3, ces valeurs n'étant pas très significatives car, soit le contact avec le bord de la boîte n'a pas encore lieu, soit le contact est non tangentiel. Mais dès l'étape 10, on obtient une valeur voisine de  $\frac{3}{2}$  à 15%. A partir de l'étape 30, cette erreur est significativement réduite, et ne dépasse pas 2%.

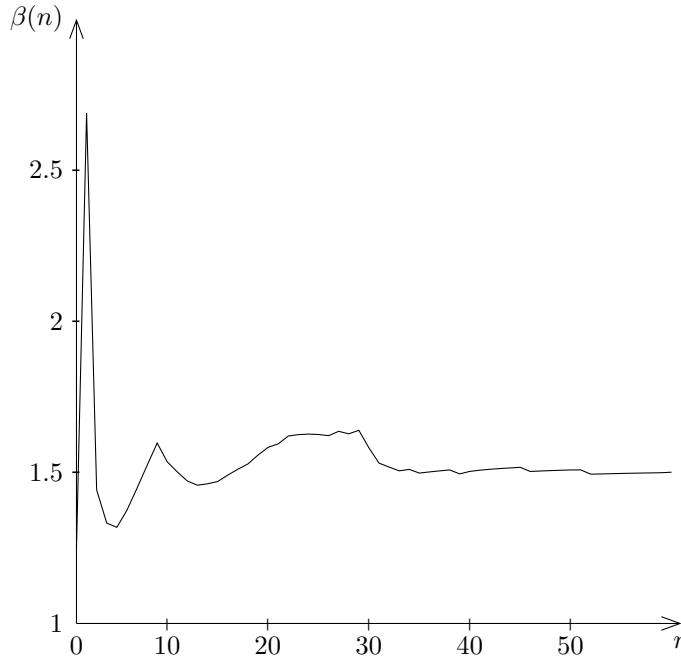


FIG. 3.14 – Estimations de  $\beta$  en fonction de  $n$  ( $h = 0.02$ ,  $V_0 = 13$ ,  $\mu = 5$ ,  $\alpha = 1.6$ )

## Changement des paramètres :

En changeant la précision du maillage, on obtient des résultats semblables. Sur la figure 3.15, on représente les résultats obtenus avec un maillage plus grossier, fournissant des résultats moins précis, mais significatifs.

Il nous a aussi semblé intéressant de faire varier le paramètre  $V_0$  : en effet, ce dernier conditionne l'existence d'un contact entre la forme optimale et le bord de la boîte, ainsi que la taille de la zone de contact (qui est un segment). La figure 3.16 représente la forme optimale obtenue, et la figure 3.17, les valeurs de  $\beta$  au fur et à mesure de l'algorithme, pour la même forme initiale (figure 3.9).

On observe qu'au début de la courbe, la valeur de  $\beta$  est largement supérieure à  $\frac{3}{2}$  : en effet, il n'y a pas encore contact avec le bord, donc on a le comportement de l'ellipse et de ses déformations, plus réguliers que lors du contact. Dès que le contact est établi, la valeur de  $\beta$  diminue significativement, oscille pendant quelques itérations, puis se stabilise à une valeur proche mais



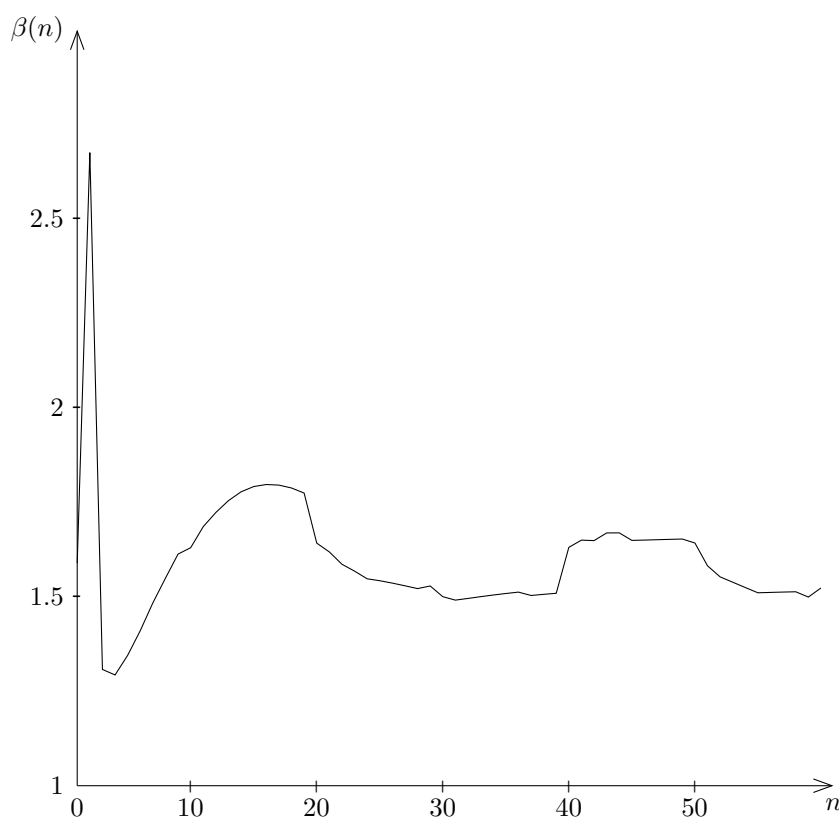


FIG. 3.15 – Estimations de  $\beta$  en fonction de  $n$  ( $h = 0.02$ ,  $V_0 = 13$ ,  $\mu = 5$ ,  $\alpha = 1.6$ )

tout de même inférieure à  $\frac{3}{2}$ , avec une erreur d'environ 6%.

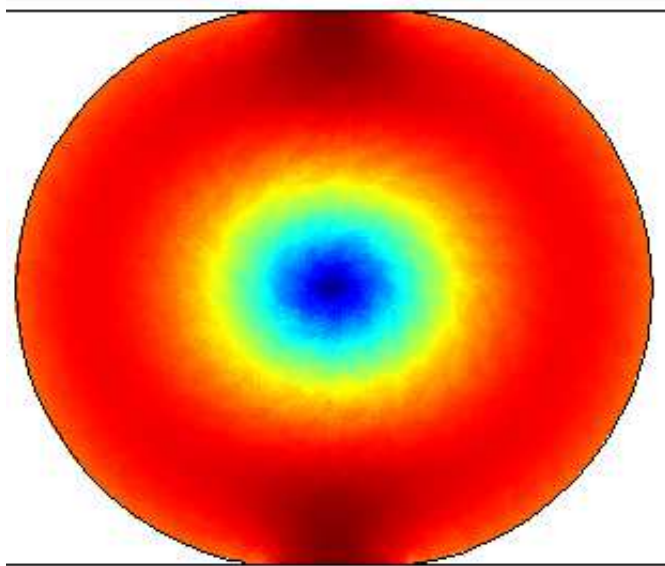
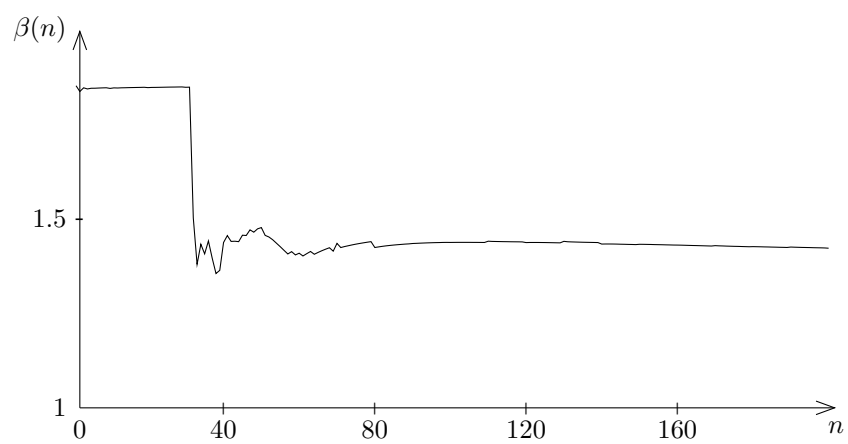
### Changement de la forme initiale :

Nous avons aussi appliqué l'algorithme pour une forme initiale que ne possèdent pas les symétries des solutions, à savoir une ellipse comme à la figure 3.9, mais tournée de 10 degrés. L'algorithme doit alors effectuer beaucoup plus d'étapes afin que les estimations de  $\beta$  soient précises, mais après suffisamment d'itérations (de l'ordre de 1000), on obtient des résultats similaires à ceux qui précèdent (avec une erreur de l'estimation inférieure à 5%).

### Limitations de la méthode :

Comme on vient de le voir, la limitation majeure de la méthode utilisée est celle de l'algorithme de gradient : ce dernier nécessite d'avoir une forme initiale qui est assez *proche* de la forme que l'on cherche. Cette proximité, ne s'exprime pas vraiment en termes de distance, mais plutôt en termes de propriétés géométriques, qui doivent être semblables à celles de la forme optimale (symétries, propriétés topologiques...). Néanmoins, cette méthode a un avantage pour notre problème : les déformations utilisées dépendent du gradient à l'étape  $k$ , qui a vocation à devenir singulier, et donc contient l'information de la régularité à la limite.

Vraisemblablement, nous avons pu retrouver la *régularité* de la forme optimale, précisément parce que la singularité n'est pas *portée* uniquement au point de contact ; certes, analytiquement, la forme est régulière partout sauf en ce point, mais cette singularité se propage sur le bord libre. En effet, la courbe 3.13 montre bien que la comparaison avec  $y = x^{3/2}$  est valable sur une bonne partie du bord libre, et c'est pour cette raison que nous pouvons retrouver numériquement ce comportement.

FIG. 3.16 – Étape 200 ;  $|\nabla u_1|$  ;  $h = 0.01$  ;  $V_0 = 9$ FIG. 3.17 – Estimations de  $\beta$  en fonction de  $n$  ;  $V_0 = 9$



## Chapitre 4

# Problèmes elliptiques surdéterminés

Dans ce chapitre, on s'intéresse aux problèmes du type :

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{dans } \Omega \\ u &= 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ u_\nu &= -c & \text{sur } \Gamma, \end{cases} \quad (4.1)$$

où  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  est un ouvert borné,  $c > 0$ , et  $\Gamma \subset \partial\Omega$ .

S'il existe une fonction  $u$  vérifiant ces trois équations, on dit qu'elle est solution d'un problème *surdéterminé*. En effet, si l'on enlève la troisième équation, et pour des  $f$  raisonnables, le problème est bien posé, c'est-à-dire qu'il existe une unique solution  $u$ , pour tout domaine  $\Omega$  ouvert borné. Ainsi, on s'attend à ce que le rajout de la troisième équation fournisse de l'information sur le domaine  $\Omega$  pour lequel il existe un  $u$  satisfaisant (4.1). Le domaine  $\Omega$  est donc maintenant considéré comme une inconnue : plus précisément, on dit que  $\Omega$  vérifie un problème surdéterminé s'il existe une fonction  $u$  suffisamment régulière satisfaisant (4.1) pour une partie non triviale  $\Gamma \subset \partial\Omega$ .

Le résultat de référence est dû à Serrin (voir [118]) et traite le cas particulier  $\Gamma = \partial\Omega$ . Sous cette dernière condition, on dit que le problème est *totale*ment surdéterminé, par opposition aux problèmes *partiellement* surdéterminés étudiés dans [56].

**Théorème 4.1 (Serrin, [118])** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^d$ , de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$ , et qu'il existe  $u \in \mathcal{C}^1(\bar{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  solution de (4.1), avec  $c > 0$ .*

*Alors  $\Omega$  est une boule, et  $u$  est radiale.*

Dans [118], J. Serrin étend même son résultat à des problèmes elliptiques plus généraux, mais on ne s'intéresse ici qu'à l'opérateur de Laplace. Après ce résultat fondateur, de nombreux articles fournissent de nouvelles démonstrations de ce théorème, ou aussi des extensions diverses, par exemple le cas d'opérateurs elliptiques dégénérés ; on réfère à [56] pour une bibliographie détaillée sur ce sujet.

La question examinée dans [56] est la suivante :

*La conclusion du théorème de Serrin est-elle encore valable si l'équation surdéterminée (4.1) n'est valable que sur une partie du bord de  $\Omega$  ?* Autrement dit si  $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ , avec les notations précédentes. On répond de façon positive à cette question dans [56], sous différentes conditions sur  $\Gamma$  : sur la régularité de  $\Gamma$ , sur le maximum de la courbure moyenne de  $\Gamma$ , ou enfin sur la géométrie de  $\Gamma$ . Dans tous les cas, ils étendent la conclusion du théorème de Serrin et montrent que  $\Omega$  est une boule, et qu'alors nécessairement  $\Gamma = \partial\Omega$ .

On aborde principalement deux questions dans ce chapitre :

- le problème surdéterminé (4.1) peut-il avoir plusieurs solutions  $\Omega$  ( $\Gamma$  étant par exemple donné) ?
- si  $\Omega$  est solution d'un problème surdéterminé (4.1), que peut-on dire de sa régularité ?

Notre premier paragraphe s'attache donc à exhiber des domaines  $\Omega$  satisfaisant un problème surdéterminé, mais étant différent d'une boule ; cela permet de préciser dans quelle mesure on peut se passer ou non de condition supplémentaire sur  $\Gamma$  pour conclure à l'unicité de la solution. Au second paragraphe, on répond à la seconde question, en généralisant l'analyse de régularité utilisée au chapitre 3, paragraphe 3.3.2.

## 4.1 Quelques exemples de non-unicité

On reproduit ici l'article “*Counterexamples to Symmetry for Partially Overdetermined Elliptic Problems*” à paraître dans le journal **International mathematical journal of analysis and its applications**, et en coécriture avec Ilaria Fragalà<sup>1</sup> et Filippo Gazzola<sup>1</sup> et Michel Pierre (voir [57]).

### Abstract

We exhibit several counterexamples showing that the famous Serrin's symmetry result for semilinear elliptic overdetermined problems may not hold for *partially* overdetermined problems, that is when both Dirichlet and Neumann boundary conditions are prescribed only *on part* of the boundary. Our counterexamples enlighten subsequent positive symmetry results obtained by the first two authors for such partially overdetermined systems and justify their assumptions as well.

*AMS 1991 subject classification* : Primary : 35J70 ; Secondary : 35B50, 49Q10

*Key words and phrases* : overdetermined boundary value problems, shape optimization.

### 4.1.1 Introduction

Let  $\Omega$  be an open bounded connected subset of  $\mathbb{R}^d$  with smooth enough boundary, and let  $\Gamma$  be a nonempty connected (relatively) open subset of  $\partial\Omega$ . Let also  $\nu$  denote the unit outer normal to  $\partial\Omega$ ,  $c$  be a positive constant and  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  be a smooth function. By “*overdetermined problem*”, we mean any boundary value problem of the following kind :

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{and} \quad u_\nu = -c & \text{on } \Gamma \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (4.2)$$

or

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \Omega \\ u = 0 \quad \text{and} \quad u_\nu = -c & \text{on } \Gamma \\ |\nabla u| = c & \text{on } \partial\Omega \setminus \Gamma, \end{cases} \quad (4.3)$$

where  $u_\nu$  denotes the normal derivative of  $u$  on  $\partial\Omega$ . Here and in the sequel, by a solution  $u$  to problem (4.2) (resp. (4.3)), we always mean that  $u \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  (resp.  $\mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ ).

The choice of the word “overdetermined” is justified by the presence of both the Dirichlet and Neumann conditions on a same nonempty part  $\Gamma$  of the boundary in problems (4.2)-(4.3) : this makes them in general not well-posed. Thus the existence of a solution to (4.2) or (4.3) is not always guaranteed, and, if existence happens to hold, it is actually supposed to imply some severe geometric constraint on  $\Omega$ .

This kind of problem was studied by Serrin [118]. His celebrated result states that, in the case of *totally* overdetermined problems, that is when  $\Gamma \equiv \partial\Omega$ , then existence of a solution implies that  $\Omega$  is a ball (and  $u$  is radially symmetric).

More recently, the case of *partially* overdetermined problems, that is when  $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ , has been studied by the first two authors in [56], where they investigate the following natural question :

“If  $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$ , can we still conclude that  $\Omega$  is a ball

whenever (4.2) or (4.3) admits a solution ?”

The answer is trivially **no** without any extra natural geometric restriction on  $\Omega$ . Assume, for instance, that  $\Omega$  is an annulus, that is  $\Omega = \{x \in \mathbb{R}^d; 0 < a < |x| < b\}$ . Then, the solution of

<sup>1</sup>Dipartimento di Matematica - Politecnico di Milano - Piazza Leonardo da Vinci 32, 20133 Milano, Italy

$-\Delta u = 1$  on  $\Omega$ , with  $u = 0$  on its boundary, is radially symmetric. Therefore,  $u_\nu$  is equal to a constant on each piece of the boundary, but with different constants for each of them.

On the other hand, if  $\partial\Omega$  is assumed to be connected, the problem becomes much more significant and delicate. In fact there are many different situations where the answer to the above question is **yes**, so that Serrin's symmetry result continues to hold. This occurs under suitable additional assumptions, involving both regularity and geometric features, on the source term  $f$  and the overdetermined region  $\Gamma$  : for the detailed statements, as well as for a more extensive bibliography about overdetermined problems, we refer to [56].

The goal of this note is to show that there are nontrivial cases (meaning in particular that  $\partial\Omega$  is connected) when the requirements of [56] are not satisfied and problems like (4.2)-(4.3) admit a solution in domains  $\Omega$  different from a ball.

The counterexamples we construct for problems of type (4.2) or (4.3) are of different kind. Problems of type (4.2) are treated in Section 4.1.2 by an approach based on shape optimization and domain derivative. More precisely, we consider the problem of minimizing the Dirichlet energy of domains with prescribed volume and confined in a planar box, that is

$$|\Omega^*| = \alpha, \quad \Omega^* \subset D, \quad J(\Omega^*) = \min_{|\Omega|=\alpha, \Omega \subset D} J(\Omega), \quad (4.4)$$

where  $D = (-1, 1)^2$  and

$$J(\Omega) := \inf_{v \in H_0^1(\Omega)} \left\{ \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla v|^2 - v \right) dx \right\}. \quad (4.5)$$

Choosing  $\alpha$  in a suitable range and applying the regularity results in [19, 20], we obtain that (4.4) admits an optimal open shape  $\Omega^*$  with a nonempty smooth "free boundary"  $\partial\Omega^* \cap D$ . Then, writing down the optimality conditions by using shape derivatives, we are lead to a problem of type (4.2) on  $\Omega^*$ , with  $f \equiv 1$  and  $\Gamma = \partial\Omega^* \cap D$ .

Problems of type (4.3) are treated in Section 4.1.3 by a different approach, which works in any dimension  $n \geq 2$ . In this case, the counterexamples are derived through some explicit computations. They are based on the idea of studying the zero level surfaces of radial functions  $u$  built so as to satisfy both an elliptic equation of the type  $-\Delta u = f(u)$  on the whole  $\mathbb{R}^d$  and the eikonal equation  $|\nabla u| = c$  on the complement of a ball. Such construction can be adapted to treat also the case of a partially overdetermined problem similar to (4.3), but stated on an exterior domain (see Section 4.1.3.2).

### 4.1.2 Counterexamples using shape optimization

In this section we use shape optimization in order to prove the following.

**Theorem 4.1.1** *There exists an open starshaped planar domain  $\Omega \subset (-1, 1)^2$ , different from a disk, such that, for a nonempty connected analytic subset  $\Gamma$  of  $\partial\Omega$ , the problem*

$$\begin{cases} -\Delta u &= 1 & \text{in } \Omega \\ u &= 0 & \text{on } \partial\Omega \\ u_\nu &= -c & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (4.6)$$

*admits a solution.*

**Remark 4.1.1** Note that a nonempty analytic subset  $\Gamma$  of  $\partial\Omega$  is relatively open in  $\partial\Omega$ .

The interest of this negative result should be considered in the light of the following extension of Serrin's result proved in [56] :

**Proposition 4.1** *Let  $\Omega$  be open and bounded with  $\partial\Omega$  connected. Let  $\Gamma \subset \partial\Omega$  nonempty and (relatively) open. Assume there exists an open set  $\tilde{\Omega}$  with a connected analytic boundary containing  $\Gamma$ . If there exists a solution  $u$  of (4.2) with  $f$  analytic, then  $\Omega = \tilde{\Omega}$ ,  $\Omega$  is a ball, and  $u$  is radially symmetric.*

In particular, Proposition 4.1 implies that the analytic piece  $\Gamma$  of the boundary of  $\Omega$  found in Theorem 4.1.1 cannot be continued into a globally analytic closed “curve” (namely the boundary of another open set  $\tilde{\Omega}$ ). In the counterexample provided here,  $\partial\Omega$  is piecewise analytic and globally at most  $\mathcal{C}^{1, \frac{1}{2}}$  as analyzed in [89].

**Proof of Theorem 4.1.1** Let  $D = (-1, 1)^2$  and  $\alpha \in (\pi, 4)$ . We will construct  $\Omega$  as an optimal set for the shape minimization problem (4.4).

From [29, Theorem 2.4.6] (see also [73]), we know there exists a quasi-open optimal set  $\Omega^*$  which solves problem (4.4). In view of [20, Corollary 1.2],  $\Omega^*$  is in fact an open set. It is known that, for any open bounded set  $\Omega$  (and in particular for  $\Omega^*$ ), the functional  $J$  defined in (4.5) satisfies

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \left( \frac{1}{2} |\nabla u_{\Omega}|^2 - u_{\Omega} \right) dx$$

where  $u_{\Omega}$  denotes the unique solution of the homogeneous Dirichlet problem

$$\begin{cases} -\Delta u = 1 & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4.7)$$

Since  $\alpha < 4$ ,  $\Omega^*$  cannot be equal to  $D$  so that the free boundary  $\Gamma := \partial\Omega^* \cap D$  is nonempty. Moreover, by [19, Section 5], we infer that  $\Gamma$  is analytic because  $f \equiv 1$  is positive and analytic. On this “free boundary”  $\Gamma$ , using the notion of shape derivative (see for instance [73]), we classically obtain the Euler-Lagrange equation of problem (4.4), namely, (4.7) with  $\Omega = \Omega^*$ ,  $u = u_{\Omega^*}$  together with

$$|\nabla u_{\Omega^*}| = \Lambda > 0 \text{ on } \partial\Omega^* \cap D. \quad (4.8)$$

Since  $f(u) = 1 > 0$ , the positivity of the Lagrange multiplier  $\Lambda$  follows from [19, Proposition 6.1]. By elliptic regularity, we know that there exists a unique solution  $u_{\Omega^*} \in \mathcal{C}^{\infty}(\Omega \cup \Gamma)$  to (4.8).

We now prove the geometric properties of solutions of (4.4). First, since  $\alpha > \pi$ ,  $\Omega^*$  is not a disk. Second, we show that  $\Omega^*$  is starshaped, or at least that it may be replaced by an optimal starshaped set. To this end, we introduce  $\tilde{\Omega} := S_X S_Y(\Omega^*)$ , where  $S_X$  and  $S_Y$  denote the Steiner symmetrization about the axes  $OX$  and  $OY$  respectively, see e.g. [73], [79]. Because of the symmetry of the square  $D$  with respect to these axes, we have  $\tilde{\Omega} \subset D$ . Moreover,  $|\tilde{\Omega}| = |\Omega^*| = \alpha$  and, by well-known properties of Steiner symmetrization,  $J(\tilde{\Omega}) \leq J(\Omega^*)$ . Therefore,  $\tilde{\Omega}$  is also a solution of the shape optimization problem (4.4) so that, as for any optimal set,  $\tilde{\Gamma} = \partial\tilde{\Omega} \cap D$  is smooth and  $u_{\tilde{\Omega}}$  satisfies (4.6). To verify that it is starshaped, we may denote

$$\forall x \in [-1, 1], \quad A(x) := \{y \in [-1, 1]; (x, y) \in S_Y(\Omega^*)\}.$$

As a consequence of the definition of the Steiner symmetrization, we have  $[0 \leq x \leq \hat{x}] \Rightarrow [A(\hat{x}) \subset A(x)]$ . We may also write

$$S_X S_Y(\Omega^*) = \left\{ (x, y); |y| \leq \frac{1}{2} \text{meas} A(x) \right\}.$$

Since  $x \in [0, 1] \rightarrow \text{meas} A(x)$  is nonincreasing, we have

$$\left[ |y| \leq \frac{1}{2} \text{meas} A(x), \lambda \in (0, 1) \right] \Rightarrow \left[ |\lambda y| \leq \frac{1}{2} \text{meas} A(x) \leq \frac{1}{2} \text{meas} A(\lambda x) \right].$$

This proves that  $\tilde{\Omega}$  is starshaped.

Therefore,  $\Omega = \tilde{\Omega}$ ,  $u = u_{\tilde{\Omega}}$ ,  $c = \Lambda$ ,  $\Gamma =$  any connected component of  $\partial\Omega \cap D$  satisfy the statement of Theorem 4.1.1.  $\square$

We conclude this section by mentioning some possible extensions of Theorem 4.1.1.

**Remark 4.1.2** The construction done in the proof of Theorem 4.1.1 is valid in any dimension and one finds as well an optimal *open* set  $\Omega^* \subset (-1, 1)^d$  (see [19] for a proof), which is different from a

ball if  $\alpha > \omega_n$  (the measure of the unit ball). But, the full regularity of the boundary is not proved -and probably does not hold- in any dimension. According to some recent papers ([31, 49, 133, 134]), it is very likely that full regularity of the boundary may be extended to dimensions greater than 2 (up to 6? but not more?).

However, as proved in [19], the *reduced boundary* of this  $\Omega^*$  is an analytic hypersurface and this regular part of the boundary is of positive  $(n-1)$ -Hausdorff measure if  $\alpha < 2^d$ , whereas  $\Omega^*$  is not a ball if  $\alpha > \omega_n$ . Therefore, this also provides a (generalized) counterexample in any dimension by choosing  $\Gamma$  to be this reduced boundary.

**Remark 4.1.3** In view of [17] (see also [70, Section 3.4]), it is possible to extend the statement of Theorem 4.1.1 to the case when  $J$  is replaced by the shape functional  $\Omega \rightarrow \lambda_1(\Omega)$ , the first eigenvalue of the Laplace operator on  $\Omega$  with homogeneous Dirichlet boundary conditions. This provides one more example of an optimal domain  $\Omega^*$  where  $u_{\Omega^*}$ , the first normalized eigenfunction, solves (4.2) with  $f(u) = \lambda u$  (here,  $\lambda = \lambda_1(\Omega^*)$ ). The proof is similar and we do not reproduce it here. It is possible that one could go further and extend the same construction to more general sources  $f(u)$ , for instance of power-type such as  $f(u) = u^p$ .

**Remark 4.1.4** The minimal shape  $\Omega^*$  for the second Dirichlet eigenvalue  $\lambda_2(\Omega)$  of the Laplace operator, among all planar *convex* domains of given area, is also a natural candidate for another nice counterexample. It is proved that  $\Omega^*$  is not a “stadium” (the convex envelope of two identical tangent balls), see [72]. However, it is expected that it looks like a stadium (see [72]). If it is the case, as explained in [56], then the first order optimality condition would lead to an overdetermined problem in which the expected overdetermined part  $\Gamma$  would be the strictly convex part of  $\partial\Omega^*$ . The exact regularity and shape of  $\Omega^*$  is still to be completely understood : see [72, Theorems 4,6,8] and [89].

**Remark 4.1.5** In the proof of Theorem 4.1.1, we started with some optimal shape  $\Omega^*$  and adapted it so that it satisfies the required conditions. We may wonder whether *all optimal shapes* have the same symmetry properties. This question is related to the nontrivial question of equality case in the Steiner symmetrization, namely : is it true that  $J(\Omega) = J(S_X(\Omega))$  implies that  $\Omega = S_X(\Omega)$  up to a translation? We refer to [39] for this question.

### 4.1.3 Counterexamples via explicit construction

In this section we provide an explicit example of a problem of type (4.3) which admits a solution on a domain different from a ball. We also exhibit a similar example for an analogous exterior problem.

#### 4.1.3.1 A counterexample in an interior domain

**Theorem 4.1.2** *There exist a Lipschitz continuous and strictly increasing function  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  and  $u \in C^2(\bar{\Omega})$  solution of*

$$\begin{cases} -\Delta u &= f(u) & \text{in } \Omega \\ |\nabla u| &= 8 & \text{on } \partial\Omega \\ u &= 0 & \text{on } \Gamma, \end{cases} \quad (4.9)$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  is open, bounded, simply connected, different from a ball, with  $\partial\Omega$  globally  $C^\infty$ , and  $\Gamma \subset \partial\Omega$  is nonempty, connected, relatively open and included in a sphere of  $\mathbb{R}^d$ .

**Proof.** Fix an integer  $n \geq 2$  and consider the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow (0, +\infty)$  defined by

$$f(s) = \begin{cases} \frac{64(n-1)}{8-s} & \text{if } s \leq 0 \\ 4[(n+2)\sqrt{s+4} - 6] & \text{if } s \geq 0. \end{cases}$$

Then,  $f$  is globally Lipschitz continuous and strictly increasing over  $\mathbb{R}$ .



Consider also the (radial) function  $u$  defined on  $\mathbb{R}^d$  by

$$u(x) = \begin{cases} (3 - |x|^2)^2 - 4 & \text{if } |x| \leq 1 \\ 8(1 - |x|) & \text{if } |x| \geq 1 \end{cases}.$$

Then,  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d)$ ; to see this, it suffices to write  $u = u(r)$  as a function of the real variable  $r = |x|$  and to note that

$$u'(r) = \begin{cases} -4r(3 - r^2) & \text{if } r \leq 1 \\ -8 & \text{if } r \geq 1 \end{cases}, \quad u''(r) = \begin{cases} -12 + 12r^2 & \text{if } r \leq 1 \\ 0 & \text{if } r \geq 1 \end{cases},$$

are continuous functions in  $[0, \infty)$ . Moreover, some computations show that  $u$  satisfies

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^d, \quad u = 0 \quad \text{on } \partial B, \quad |\nabla u| = 8 \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus B,$$

where  $B$  denotes the unit ball.

Let  $\Omega_1 = \{x \in B; x_1 < \frac{1}{2}\}$  and  $D = \{x \in B; x_1 = \frac{1}{2}\}$ . Consider a bounded domain  $\Omega_2 \subset \{x \in \mathbb{R}^d; x_1 > \frac{1}{2}\}$  such that  $D \subset \partial\Omega_2$  and  $(\partial\Omega_2 \setminus \overline{D}) \subset (\mathbb{R}^d \setminus \overline{B})$ . Let  $\Omega = \Omega_1 \cup D \cup \Omega_2$  (see Figure 1); for a suitable choice of  $\Omega_2$  one has  $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$ . Let  $\Gamma = \partial\Omega_1 \cap \partial\Omega$ , then  $u$  satisfies (4.9) but  $\Omega$  is not a ball.  $\square$

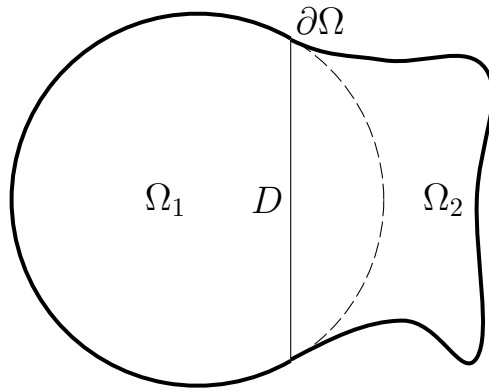


Figure 1 : domain  $\Omega$  in Theorem 4.1.2

Theorem 4.1.2 should be compared with the following result obtained in [56], and similar to Proposition 4.1 :

**Proposition 4.2** *Let  $\Omega$  be open and bounded with  $\partial\Omega$  connected. Let  $\Gamma \subset \partial\Omega$  nonempty and (relatively) open. Assume there exists an open set  $\tilde{\Omega}$  with a connected analytic boundary containing  $\Gamma$ . If there exists a solution  $u$  of (4.9) with  $f$  analytic **and nonincreasing**, then  $\Omega = \tilde{\Omega}$ ,  $\Omega$  is a ball, and  $u$  is radially symmetric.*

Note in particular that : the overdetermined part  $\Gamma$  in Theorem 4.1.2 satisfy the hypothesis in Proposition 4.2 (analytically continuable according to the definition in [56, Section 3.1]), but  $f$  is neither analytic, nor nonincreasing.

Similarly, Theorem 4.1.2 should also be compared with the statements (b) in Theorems 3 and 7 in [56] which gives more various sufficient conditions to obtain symmetry in overdetermined problems of type (4.9). Again, Theorem 4.1.2 provides an example where all these hypothesis are satisfied, except the fact that  $f$  be nonincreasing.

#### 4.1.3.2 A counterexample in an exterior domain

**Theorem 4.1.3** *There exist a Lipschitz continuous function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , and  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \Omega)$  solution of*

$$\begin{cases} -\Delta u = f(u) & \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \overline{\Omega} \\ |\nabla u| = \frac{1}{2} & \text{on } \partial\Omega \\ u = 1 & \text{on } \Gamma \\ u \rightarrow 0, |\nabla u| \rightarrow 0 & \text{as } |x| \rightarrow \infty, \end{cases} \quad (4.10)$$

where  $\Omega \subset \mathbb{R}^d$  is open, bounded, simply connected, different from a ball, with  $\partial\Omega$  globally  $\mathcal{C}^\infty$ , and  $\Gamma \subset \partial\Omega$  is nonempty, connected, relatively open and included in a sphere.

**Proof.** Fix an integer  $n \geq 2$  and consider the function  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by

$$f(s) = \begin{cases} \frac{n-1}{2(3-2s)} & \text{if } 1 \leq s < \frac{3}{2} \\ \frac{3(n-3)}{16} (3 - \sqrt{9-8s})^3 - \frac{n-4}{16} (3 - \sqrt{9-8s})^4 & \text{if } 0 < s \leq 1. \end{cases}$$

Then,  $f$  is globally Lipschitz continuous over  $(0, \frac{3}{2})$ ; moreover, if  $n \geq 4$  then  $f$  is positive and strictly increasing.

Consider also the (radial) function  $u$  defined on  $\mathbb{R}^d \setminus \{0\}$  by

$$u(x) = \begin{cases} \frac{3-|x|}{2} & \text{if } |x| \leq 1 \\ \frac{3}{2|x|} - \frac{1}{2|x|^2} & \text{if } |x| \geq 1. \end{cases}$$

Then,  $u \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ ; to see this, it suffices to write  $u = u(r)$  as a function of the real variable  $r = |x|$  and to note that

$$u'(r) = \begin{cases} -\frac{1}{2} & \text{if } 0 < r \leq 1 \\ -\frac{3}{2r^2} + \frac{1}{r^3} & \text{if } r \geq 1, \end{cases} \quad u''(r) = \begin{cases} 0 & \text{if } 0 < r \leq 1 \\ \frac{3}{r^3} - \frac{3}{r^4} & \text{if } r \geq 1, \end{cases}$$

are continuous functions in  $(0, \infty)$ . Moreover, some computations show that  $u$  satisfies

$$-\Delta u = f(u) \quad \text{in } \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \quad u = 1 \quad \text{on } \partial B, \quad |\nabla u| = \frac{1}{2} \quad \text{in } \bar{B} \setminus \{0\},$$

where  $B$  denotes the unit ball. Take any smooth domain  $\Omega \subsetneq B$  such that  $0 \in \Omega$  and  $\{x \in \partial B; x_1 < \frac{1}{2}\} \subset \partial\Omega$  (see figure 2). Let  $\Gamma = \partial\Omega \cap \partial B$ , then  $u$  satisfies (4.10) but  $\Omega$  is not a ball.

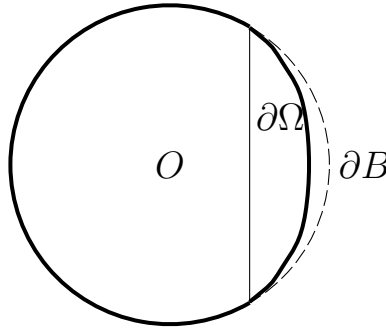


Figure 2 : domain  $\Omega$  in Theorem 4.1.3.

**Remark 4.1.6** Again, Theorem 4.1.3 should be compared with the results in [56], similarly to what we did for Theorem 4.1.2.

## 4.2 Régularité

On suppose maintenant que  $\Omega$  est solution d'un problème partiellement surdéterminé du type (4.1), avec  $\Gamma \subsetneq \partial\Omega$  et  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ . On montre dans ce paragraphe que,  $\Gamma$  est nécessairement régulier, et surtout que la régularité du recollement entre  $\Gamma$  et  $\partial\Omega \setminus \Gamma$  n'est pas quelconque; en particulier, on montre que  $\Omega$  est de classe  $\mathcal{C}^{k, \frac{1}{2}}$  pour un certain  $k$ , ou bien de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .

### 4.2.1 Régularité de la partie surdéterminée

**Proposition 4.3** Soient  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\Gamma \subset \partial\Omega$  de classe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  avec  $\alpha \in ]0, 1[$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , et  $f \in \mathcal{C}^k(\mathbb{R})$ , tels qu'il existe  $u \in \mathcal{C}^1(\Omega \cup \Gamma) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$  solution de (4.1).

Alors  $\Gamma$  est de classe  $\mathcal{C}^{k+1,1^-}$ .

**Remarque 4.1** On peut affaiblir l'hypothèse  $\Gamma$  de classe  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  à seulement  $\mathcal{C}^1$  dans certains cas : précisément, si  $|\phi'|$  ne s'annule pas (où  $\phi$  est une application conforme de  $\mathbb{H}$  (ou d'un disque) à valeurs dans  $\Omega^*$ ), la démonstration ci-dessous reste valable. Par exemple, si  $\Omega$  est convexe, cette propriété est vérifiée.

**Remarque 4.2** Ce résultat n'est pas nouveau. Il est même démontré en dimension quelconque dans [130]. Mais on donne une nouvelle démonstration (bi-dimensionnelle), qui permet au lecteur de comprendre plus facilement le cas plus complexe de la régularité d'un recollement, traité au paragraphe suivant.

**Remarque 4.3** A l'aide des résultats de [83], on déduit de la proposition 4.3 que  $\Gamma$  est même analytique, si  $f$  l'est.

**Preuve :**

#### Étape 1. Transport de l'équation sur un domaine régulier :

On introduit l'application conforme du domaine  $\Omega$ ,  $\phi : \mathbb{H} \rightarrow \Omega (= \phi_\Omega)$ , où  $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C}; \Im(z) < 0\}$  (si le domaine  $\Omega$  n'est pas simplement connexe, on peut localiser l'argumentation sur un voisinage de  $\Gamma$ ).

On pose  $J := \phi^{-1}(\Gamma) \subset \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ , on prend  $\mathcal{V}$  un semi-voisinage borné dans  $\mathbb{H}$  tel que  $\partial\mathcal{V} \cap \mathbb{R} \subset J$ , et on reformule le problème de Dirichlet, posé initialement sur  $\Omega$ , dans le domaine  $\mathbb{H}$  (qui est régulier). On note  $\widehat{\cdot}$  la composition par  $\phi$  et on obtient, puisque la fonction  $\phi$  est holomorphe :

$$\begin{cases} -\Delta \widehat{u} &= |\phi'|^2 f(\widehat{u}) & \text{dans } \mathbb{H} \\ \widehat{u} &= 0 & \text{sur } \partial\mathbb{H}. \\ |\nabla \widehat{u}| &= |\phi'| |\widehat{\nabla} u| = c|\phi'| & \text{sur } J. \end{cases} \quad (4.11)$$

**Étape 2. Régularité de  $\phi$  :**  $|\phi'| \in C^{0,\alpha}(\overline{\mathcal{V}})$  d'après le résultat suivant :

**Lemme 4.1** Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\beta \in ]0, 1[$ . Alors

$$\ln(|\phi'|) \text{ est } \mathcal{C}^{n,\beta} \text{ sur } J \iff \Gamma \text{ est } \mathcal{C}^{n+1,\beta}.$$

(voir [132], [112] et la remarque 3.15).

De plus,  $|\phi'|$  est minoré par une constante non nulle sur  $\overline{\mathcal{V}}$  (voir [112]).

#### Étape 3. Régularité de $\ln(|\phi'|)$ sur $J$ :

D'après les résultats de régularité dans les espaces de Hölder pour le problème (4.11), on déduit de la régularité de  $|\phi'|$  et du fait que  $f$  est localement bornée, que  $\widehat{u} \in W^{2,p}(\mathcal{V})$  pour tout  $p \in ]1, \infty[$ .

Alors l'identité

$$|\nabla \widehat{u}| = c|\phi'| \text{ sur } J, \quad (4.12)$$

implique que  $|\phi'|$  admet une trace dans  $W^{1-\frac{1}{p},p}(J \cap \partial\mathcal{V})$ , et comme  $|\phi'|$  ne s'annule pas sur  $J \cap \partial\mathcal{V}$ , le lemme 3.3 implique la même régularité pour  $\ln(|\phi'|)$ .

#### Étape 4. Gain de régularité

On a l'équation

$$\begin{cases} \Delta \ln|\phi'| &= 0 \text{ dans } \mathbb{H} \\ \ln|\phi'| &\in W^{1-\frac{1}{p},p}(J \cap \partial\mathcal{V}). \end{cases} \quad (4.13)$$

On en déduit  $\ln|\phi'| \in W^{1,p}(\mathcal{V})$  pour tout  $p \in ]1, \infty[$ , et donc  $\text{Arg}(\phi')$  a la même régularité, et par suite  $\Gamma$  est  $\mathcal{C}^{1,\beta}$  pour tout  $\beta$  par injection de Sobolev.

**Étape 5. Récurrence :**

Il est maintenant plus simple de travailler dans les espaces de Hölder (notamment pour le passage au logarithme dans l'étape 3. On répète les étapes 3 et 4, et on montre,  $k$  étant un entier supérieur à 1 et  $\beta$  un réel de  $]0, 1[$ ,

$$\left[ f \in \mathcal{C}^n, \Gamma \in \mathcal{C}^{n,\beta}, \hat{u} \in \mathcal{C}^{n,\beta} \right] \implies \left[ \Gamma \in \mathcal{C}^{n+1,\beta}, \hat{u} \in \mathcal{C}^{n+1,\beta} \right]$$

Une récurrence fournit alors la régularité annoncée.  $\square$

**4.2.2 Régularité des recollements**

Le résultat de ce paragraphe généralise les théorèmes 3.5 et 3.7 pour des domaines  $\Omega$  solutions d'un problème partiellement surdéterminé.

**Théorème 4.2** *Soit  $\Omega$  un ouvert borné de  $\mathbb{R}^2$ , et  $\Gamma \subset \partial\Omega$ . On suppose que*

- $\partial\Omega \setminus \Gamma$  a un nombre fini de composantes connexes,
- $\partial\Omega$  est  $\mathcal{C}^{1,\alpha}$  ( $\alpha \in ]0, 1[$ ), et  $\overline{\partial\Omega \setminus \Gamma}$  est  $\mathcal{C}^\infty$ .

*Enfin, on suppose qu'il existe une fonction  $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^1(\Omega \cup \Gamma)$  solution de (4.1), avec une fonction  $f$  de classe  $\mathcal{C}^\infty$ .*

*Alors,*

- *soit  $\partial\Omega$  est  $\mathcal{C}^\infty$ ,*
- *soit  $\exists k \in \mathbb{N}^*$ ,  $\left[ \partial\Omega \in \mathcal{C}^{k,\frac{1}{2}}, \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \partial\Omega \notin \mathcal{C}^{k,\frac{1}{2}+\varepsilon} \right]$ .*

**Preuve :**

**Étape 1. Transport de l'équation sur un domaine régulier :**

On s'intéresse à la régularité au voisinage d'un point  $A$  de  $\overline{\Gamma \cap \partial\Omega} \setminus \Gamma$ . On introduit  $\phi$  l'application conforme de  $\Omega$  s'annulant en  $A$ , et on pose  $J_+ := \phi^{-1}(\partial\Omega \setminus \Gamma) \subset \mathbb{R} = \partial\mathbb{H}$ ,  $J_- := \phi^{-1}(\Gamma)$ , et on prend  $\mathcal{V}$  un semi-voisinage borné de 0 dans  $\mathbb{H}$  tel que  $\partial\mathcal{V} \cap \mathbb{R} \subset \overline{J_-} \cup \overline{J_+}$  (voir Figure 4.1).

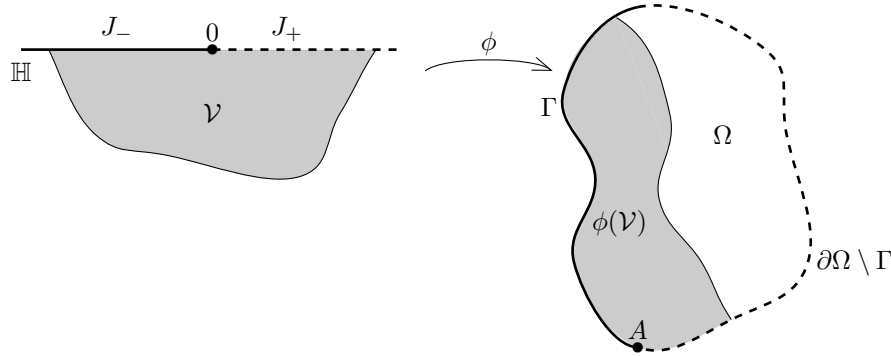


FIG. 4.1 – Application conforme

En notant  $\hat{\cdot}$  la composition par  $\phi$ , on obtient :

$$\begin{cases} -\Delta \hat{u} &= |\phi'|^2 f(\hat{u}) & \text{dans } \mathbb{H} \\ \hat{u} &= 0 & \text{sur } \partial\mathbb{H}. \\ |\nabla \hat{u}| &= |\phi'| |\widehat{\nabla u}| = c|\phi'| & \text{sur } J_-. \end{cases} \quad (4.14)$$

**Étape 2. Régularité de  $\phi$ , issue de la régularité  $\Omega$  :**  $|\phi'|$  est  $\mathcal{C}^{0,\alpha}$  et ne s'annule pas sur  $\overline{\mathbb{H}}$  (voir [112]).

**Étape 3. Régularité de  $\text{Arg}(\phi')$  sur  $J_+$ , et de  $\ln(|\phi'|)$  sur  $J_-$  :**

Comme  $\text{Arg}(\phi')$  paramétrise l'angle de la tangente au bord de  $\partial\Omega$ ,  $\text{Arg}(\phi')$  est défini et  $\mathcal{C}^\infty$  sur  $\overline{J_+}$ .

D'après les résultats de régularité dans les espaces de Hölder pour le problème (4.14),  $\widehat{u} \in C^{2,\alpha}(\overline{\mathbb{H}})$ . Alors l'identité

$$|\nabla \widehat{u}| = |\phi'| |\widehat{\nabla u}| = c|\phi'| \text{ sur } J_-, \quad (4.15)$$

implique que  $|\phi'|$  admet une trace sur  $J_-$  et que cette trace est dans  $\mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{J_- \cap \partial \mathcal{V}})$ , puis avec l'étape 2,  $\ln(|\phi'|)|_{J_-} \in \mathcal{C}^{1,\alpha}(\overline{J_- \cap \partial \mathcal{V}})$ .

#### Étape 4. Régularité d'un problème mixte :

En posant  $a := \ln|\phi'| = \Re(\ln(\phi'))$  et  $b := \text{Arg}(\phi') = \Im(\ln(\phi'))$  (liées par les équations de Cauchy-Riemann), on est donc amené au problème mixte suivant :

$$\begin{cases} \Delta a &= 0 & \text{dans } \mathbb{H} \\ a &= \ln\left(\frac{|\nabla \widehat{u}|}{c}\right) =: g_D & \text{sur } J_- \\ \partial_y a &= -\partial_x b =: g_N & \text{sur } J_+. \end{cases} \quad (4.16)$$

On fait alors appel au lemme suivant, qui établit le comportement asymptotique d'une solution d'un problème mixte sur un domaine à coin plat :

**Lemme 4.2** *Soit  $a \in \mathcal{C}^{0,\beta}(\mathcal{V})$  solution de (3.44),  $\beta \in ]0, 1[ \setminus \{\frac{1}{2}\}$ , et  $\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}$  tel que  $\overline{\mathcal{V}'} \subset \mathcal{V} \cup \partial \mathbb{H}$ . Si  $g_D \in \mathcal{C}^{n,\beta}(\overline{J_-})$  avec  $n \in \mathbb{N}^*$ , et  $g_N \in \mathcal{C}^\infty(\overline{J_+})$ , alors  $\exists a_0 \dots, a_n \in \mathbb{R}$  tels que*

$$\text{si } \beta < \frac{1}{2}, \quad a - \sum_{i=0}^{n-1} a_i r^{i+\frac{1}{2}} \cos\left((i+\frac{1}{2})\varphi\right) \in \mathcal{C}^{n,\beta}(\overline{\mathcal{V}'}) \quad (4.17)$$

$$\text{si } \beta > \frac{1}{2}, \quad a - \sum_{i=0}^n a_i r^{i+\frac{1}{2}} \cos\left((i+\frac{1}{2})\varphi\right) \in \mathcal{C}^{n,\beta}(\overline{\mathcal{V}'}). \quad (4.18)$$

où  $(r, \varphi)$  sont les coordonnées polaires centrées en 0, et telles que  $\varphi = 0$  sur  $J_+$  et  $\varphi = \pi$  sur  $J_-$ .

(voir [64] pour une preuve).

On peut appliquer la première partie de ce lemme à  $a = \ln(|\phi'|)$  et on en déduit en premier lieu le développement (4.17) avec  $n = 1$ , et donc que  $\ln(|\phi'|) \in \mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}(\overline{\mathcal{V}'})$ . En appliquant ce raisonnement sur des voisinages de tous les segments de  $\partial \Omega$ , on en déduit que  $\ln(|\phi'|)$  est  $\mathcal{C}^{0,\frac{1}{2}}$  sur  $\overline{\mathbb{H}}$ , et par les résultats de [132] (voir aussi le livre [112] qui regroupe les résultats et les références sur ces questions), on en déduit que  $\Omega$  est  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ .

#### Étape 5. Récurrence :

Avec la deuxième partie du lemme 4.2, on montre pour  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\left[ \partial \Omega \in \mathcal{C}^{n,\frac{1}{2}+\varepsilon}, \widehat{u} \in \mathcal{C}^n \right] \implies \left[ \partial \Omega \in \mathcal{C}^{n+1,\frac{1}{2}}, \widehat{u} \in \mathcal{C}^{n+1} \right].$$

La régularité de  $\Omega$  s'arrête donc dès que l'un des coefficients du développement asymptotique est non nul (pour au moins un des points de  $\overline{\Gamma} \cap \partial \Omega \setminus \Gamma$ ). Le résultat suit.  $\square$

# Perspectives

## Chapitre 1

On a clarifié la notion de structure des dérivées de formes pour des ensembles à périmètre fini, en généralisant le théorème de Hadamard. Ce résultat abstrait exploite la possibilité de définir une normale au bord d'un ensemble à périmètre fini (théorie géométrique de la mesure) ; cela permet de dire que les dérivées de forme dépendent des composantes normales d'un déplacement, comme dans le cas régulier. On en a déduit une nouvelle notion de courbure moyenne, valable pour tout ensemble à périmètre fini (voir [54] pour une autre approche, *sets of positive reach*, et le livre récent [107] pour un récapitulatif des courbures généralisées qui apparaissent dans la littérature), et on a donné des conditions suffisantes pour que cette courbure soit une mesure.

D'un point de vue géométrique, il est intéressant de savoir si l'on peut définir de manière semblable (i.e. en dérivant des fonctions de forme) d'autres objets géométriques, en particulier les autres courbures. On peut aussi mettre à l'épreuve cette nouvelle notion, en tentant de généraliser les résultats classiques de la géométrie (par exemple un théorème du type Gauss-Bonnet).

Pour rester plus proche de l'optimisation de forme, il serait intéressant de regarder la structure des dérivées pour des fonctions seulement directionnellement différentiables. Par exemple pour les fonctions valeurs propres, on peut sans doute généraliser notre approche, comme cela est fait dans le cas régulier dans [124]. Il faudrait aussi approfondir les résultats que nous avons obtenus sur la structure des dérivées secondes, pour des ensembles irréguliers. Des exemples académiques (par exemple le volume et le périmètre) devraient pouvoir fournir des idées pour obtenir des formules valables sans régularité.

De plus, on peut chercher à savoir dans quelle mesure on peut exploiter les équations d'Euler-Lagrange pour obtenir de la régularité. En effet, grâce à notre approche, on peut dire qu'une forme optimale  $\Omega^*$  satisfait des conditions du type :

$$\mathcal{L}_{1,\Omega^*} = 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{L}_{2,\Omega^*} \geq 0,$$

où  $\mathcal{L}_{1,\Omega^*}$  et  $\mathcal{L}_{2,\Omega^*}$ , les formes linéaires (resp. bilinéaires) sur le Banach  $X$  (resp.  $X \times X$ ) que l'on a définies au théorème 1.3, représentant les dérivées du Lagrangien que l'on minimise. Ces équations ont un sens pour toute forme optimale à périmètre fini. On peut se demander quelle régularité cela implique. Bien sûr, une telle question est très délicate en général, puisque l'on demande d'obtenir de la régularité avec des conditions d'optimalité exprimées dans un sens très faible. Des résultats de régularité pour les domaines dont la dérivée du périmètre est représentable dans  $L^p$ , ont été obtenus dans [3] et [4], voir aussi [122].

Quant aux problèmes évoqués dans les applications, à savoir le problème de Cheeger, et le problème de l'électromouillage, il reste beaucoup à faire. Le problème de Cheeger a été très étudié récemment (voir [15], [81], [94], [7], [82], [69], [35], [125] entre autres), mais on aimerait obtenir encore plus d'informations quantitatives. Notamment, il semble que les conditions d'ordre 2 pourraient sans doute être exploitées (suggestion de Marc Dambrine<sup>2</sup> dans ce sens). Pour le problème de l'électromouillage, étudié numériquement dans [116], l'analyse mathématique reste encore assez ouverte : le problème de l'existence n'a pas été étudié, et pour la régularité, là encore le travail (difficile) reste à faire ; il devrait consister en l'adaptation des résultats de Nicolas Landais [92].

---

<sup>2</sup>Laboratoire de Mathématiques et de leurs applications, Université de Pau et des Pays de l'Adour

## Chapitre 2

On a établi dans ce paragraphe un cadre général pour écrire les conditions d'optimalité pour un problème d'optimisation de forme, sans hypothèse de régularité des formes optimales. On a ainsi pu clarifier les difficultés d'analyse qui ressortent d'une telle contrainte, tout en montrant que les conditions d'ordre 2 permettent d'obtenir des informations géométriques pertinentes sur les domaines optimaux.

Il serait intéressant de poursuivre dans cette voie, en adaptant l'approche à d'autres contraintes. On pourrait, par exemple, tenter de retrouver un certain nombre de résultats connus sur l'optimisation de forme dans la classe des corps de largeur constante. En effet, comme on peut le constater dans le récent travail de thèse de TERENCE BAYEN ([14]), un tel problème peut avoir une formulation semblable à celle étudiée dans notre chapitre. TERENCE BAYEN retrouve, entre autres, par des méthodes de contrôle optimal le théorème de Blaschke-Lebesgue qui dit que le triangle de Reuleaux est le domaine d'aire minimale parmi les ensembles plans de largeur égale à 1 (problème encore ouvert en dimension 3). On pourrait commencer par essayer de retrouver ce résultat par notre méthode, ou même tenter de comparer les deux approches.

Mais bien sûr, la tâche la plus ardue consiste à s'intéresser à l'optimisation de forme sous contrainte de convexité en dimension 3. Dans ce domaine, le problème modèle est le problème de Newton (voir par exemple [86]) :

$$\min_{\substack{\mathbb{D} \times \{0\} \subset \Omega \subset \mathbb{D} \times [0, M] \\ \Omega \text{ convexe}}} \int_{\partial\Omega} ((\nu_\Omega \cdot e_z)_+)^3 d\mathcal{H}^2$$

où  $\mathbb{D}$  est le disque unité de  $\mathbb{R}^2$ ,  $M > 0$ , et  $e_z = (0, 0, 1)$ . Ainsi on optimise parmi les domaines convexes de  $\mathbb{R}^3$  contenant le disque  $\mathbb{D} \times \{0\}$  et inclus dans un cylindre donné.

Il est démontré dans [87] que tout domaine optimal n'est nulle part strictement convexe, dans le sens que, voyant  $\Omega$  en tant que graphe d'une fonction  $f$  définie sur  $\mathbb{D}$ ,  $f$  n'est strictement convexe sur aucun ouvert de  $\mathbb{D}$  (voir [21] pour un résultat semblable, mais sous réserve de régularité, situation qui rentre bien dans le cadre de cette thèse).

La situation est donc semblable à celle que nous avons nous-mêmes analysée, mais, bien sûr, plus complexe car tri-dimensionnelle (et cela ne suffit pas ici à imaginer que les domaines optimaux soient polyédraux).

Dans notre approche en dimension 2, le point de départ fut de choisir une paramétrisation de l'ensemble des convexes par un cône vectoriel, afin de pouvoir reformuler simplement le problème d'optimisation de forme sur un espace de fonctions avec des contraintes bien écrites. En dimension supérieure, on peut aussi trouver une paramétrisation utile de l'ensemble des domaines convexes, à savoir celle donnée par le théorème d'Alexandrov (voir [33] ou aussi [34]) qui fournit une bijection entre l'ensemble des domaines convexes de dimension  $d$  de  $\mathbb{R}^d$ , et l'ensemble de mesures  $\mu$  sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ , positives et telles que  $\int_{\mathbb{S}^{d-1}} y d\mu = 0$ .

Une telle mesure se définit, pour un convexe  $\Omega$ , par

$$\forall \varphi \in \mathcal{C}^0(\mathbb{S}^{d-1}), \int_{\mathbb{S}^{d-1}} \varphi(y) d\mu_\Omega(y) = \int_{\partial\Omega} \varphi(\nu_\Omega(x)) d\mathcal{H}^{d-1}(x).$$

En conséquence, le problème de Newton se reformule par :

$$\min_{\mu \geq 0, \mu \in K} \int_{\mathbb{S}^{d-1}} ((y \cdot e_z)_+)^3 d\mu(y)$$

où  $\mu$  est dans  $K$ , un certain sous-ensemble de l'espace des mesures sur  $\mathbb{S}^{d-1}$ . Notons que la nouvelle fonctionnelle est linéaire en la nouvelle variable  $\mu$ .

Il serait intéressant aussi d'analyser d'autres contraintes géométriques, voire topologiques. Les contraintes du type *le nombre de composantes connexes du complémentaire est borné par une constante fixée*, intervient en optimisation de forme avec les résultats d'existence (en dimension 2) de ŠVERÁK [128]. On peut alors se demander comment écrire des conditions d'optimalité pour ce

type de contrainte.

## Chapitre 3

### Minimisation de $\lambda_1$ sous contrainte de volume et d'inclusion

La question de la régularité a été étudiée pour le problème de minimisation de la première valeur propre. Comme on l'a déjà évoqué en introduction, il serait intéressant d'utiliser et d'adapter les différents résultats qui permettent d'améliorer l'estimation de la taille de l'ensemble singulier dans la frontière libre. En effet, on a démontré que cet ensemble était de codimension supérieure à 1, mais au vu des résultats de [133, 134] et [31], cette estimation semble pouvoir être améliorée.

Une autre question, que nous avons résolue ici uniquement en dimension 2 et pour des boîtes particulières, consiste à étudier le comportement au bord de la boîte. Ce type de question a été envisagé pour le problème de l'obstacle (voir les références citées au début du paragraphe 3.4), et la régularité a été étudiée jusqu'au bord du domaine, mais il ne semble pas que ce travail ait été effectué dans notre situation. On s'attend par exemple, à un contact tangentiel entre la forme optimale et la boîte (comme pour le problème de l'obstacle).

Enfin, on rappelle que la convexité des solutions dans le cas où la boîte est convexe, semble être un problème encore ouvert (voir par exemple [63] pour des résultats récents dans cette direction).

### Minimisation de $\lambda_2$ sous contrainte de volume et de convexité

On a donc approfondi l'étude de ce problème sous contrainte de convexité, en analysant précisément la régularité de la forme optimale. Nos résultats sur les problèmes surdéterminés suggèrent que la situation que nous avons isolée, est assez générale. Mais bien sûr, il y a un certain nombre d'obstacles si l'on veut généraliser complètement nos résultats.

Si l'on veut par exemple s'intéresser à la minimisation des autres valeurs propres sous contrainte de convexité (par exemple la quatrième, puisque l'on s'attend à ce que le disque minimise la troisième sous contrainte de volume), il faut gérer la difficulté de la simplicité pour avoir le droit de dériver. Ensuite, la compréhension des lignes nodales devient beaucoup plus complexe que pour la seconde valeur propre (il existe encore des conjectures pour la ligne nodale de la seconde valeur propre pour des domaines simplement connexes).

On pourrait aussi essayer, au moins numériquement, de voir l'allure des formes optimales en dimension 3, et voir dans quelle mesure notre approche peut être adaptée. Les obstacles sont évidemment nombreux, le premier étant la compréhension de la contrainte de convexité, comme suggéré dans les perspectives du chapitre 2.

Une autre question, mélange des deux problèmes précédents, consiste à analyser les formes optimales de

$$\min_{\substack{|\Omega|=V_0 \\ \Omega \subset D}} \lambda_2(\Omega), \quad (4.19)$$

dans le cas où la boîte  $D$  ne contient pas deux boules de volume  $V_0/2$ . On s'attend à ce que la forme optimale devienne connexe si la boîte est petite. Dans ce cas, les bords libres devraient être réguliers en dehors de deux points de singularité de type point de rebroussement (en dimension 2). Toute la démarche de la régularité est à faire sur ce problème.

Numériquement, on pourrait aussi appliquer nos algorithmes au problème suivant : la forme optimale de l'habitat. Dans [114], un problème d'optimisation de forme lié à la dynamique des populations est étudié. Un modèle classique de réaction-diffusion en environnement homogène s'écrit

$$\partial_t u = D\Delta u + u(\mu(x) - \nu(x)u) \text{ dans } \Omega.$$

L'inconnue  $u(t, x)$  est la densité de population,  $D$  le taux de dispersion,  $\mu(x)$  prend deux valeurs  $\mu^+ > \mu_-$  selon  $x$ . Les régions telles que  $\mu(x) = \mu^+$  sont favorables, ce seront les zones d'habitation, et celles telle que  $\mu(x) = \mu_-$  sont défavorables. On peut par exemple considérer des domaines  $\Omega$



périodiques,  $\mu$  et  $\nu$  étant aussi périodiques (la période est un pavé  $C$  de  $\mathbb{R}^d$ ), sinon on peut rajouter des conditions de Neumann au bord.

On peut maintenant définir la valeur propre principale de l'opérateur  $-D\Delta - \mu Id$ , c'est-à-dire l'unique réel  $\lambda_1$  tel qu'il existe  $\Phi$  satisfaisant

$$-D\Delta\Phi - \mu\Phi = \lambda_1\Phi \text{ dans } \Omega, \quad \Phi > 0 \text{ dans } \Omega$$

avec conditions périodiques. Cette valeur propre est une fonction de  $\mu$  et on a la formule

$$\lambda_1(\mu) = \min_{\phi \in H_{per}^1} \frac{\int_C D|\nabla\phi|^2 - \mu\phi^2}{\phi^2}.$$

Il est facile de voir que  $\lambda_1(\mu)$  ne dépend en fait que du domaine  $\{\mu(x) = \mu^+\}$  noté  $C^+$ . On note alors  $\lambda_1(C^+) = \lambda_1(\mu)$ .

La question de la configuration optimale de l'habitat s'écrit alors

$$\min_{C^+ \subset C, |C^+|=h|C|} \lambda_1(C^+) \quad (4.20)$$

où  $h \in ]0, 1[$  est la proportion entre les zones favorables et défavorables. Un certain nombre de propriétés ont été démontrées dans [114], en particulier l'existence d'une forme optimale et la condition d'ordre 1 (sous réserve de régularité). Il est aussi démontré que le disque n'est pas optimal en général. La question de la régularité est traitée (en dimension 2) dans [36].

Une méthode numérique de résolution a été mise en place dans [114], méthode qui consiste à tester toute forme (discrétisée) satisfaisant aux symétries connues des formes optimales. Bien sûr, la complexité d'une telle méthode est très élevée. Nous pourrions adapter nos algorithmes d'optimisation, et ainsi retrouver numériquement des solutions de (4.20), en faisant varier  $h$ . Cette méthode a, évidemment, une complexité moindre que celle utilisée dans [114], ce qui permet des calculs plus précis (voir paragraphe 3.5).

## Chapitre 4

On a mis au point différents exemples de problèmes surdéterminés sur des domaines  $\Omega$  différents d'une boule, et satisfaisant  $\partial\Omega$  connexe. En ce qui concerne l'exemple construit via l'optimisation de forme, on peut s'intéresser à savoir si l'on pourrait adapter une telle approche pour obtenir un problème de type Neumann, avec condition surdéterminée de Dirichlet.

Quant aux résultats de régularité que nous avons isolés, nous pouvons tenter de généraliser l'approche à des domaines de  $\mathbb{R}^d$  avec  $d > 2$ . En effet, si les difficultés sont nombreuses pour généraliser les résultats de régularité pour la forme convexe qui minimise  $\lambda_2$  en dimension plus grande que 2, on peut espérer que l'étape qui correspond uniquement à l'analyse du problème surdéterminé, peut plus facilement se généraliser. Nous avons certes utilisé une méthode purement bi-dimensionnelle, basée sur la représentation conforme, mais on peut tenter des déformations valables dans un cadre plus général. Dans ce cas, les calculs seraient bien sûr moins élégants, et nécessiteraient d'utiliser des résultats sur les problèmes à *coins* en dimension supérieure à 2, très techniques à mettre en place. Mais il semble tout de même vraisemblable de pouvoir généraliser le théorème 4.2 (sans pour autant certifier que les régularités qui apparaissent sont les mêmes ; les calculs devraient fournir le résultat).

Il serait aussi intéressant de comparer nos résultats aux résultats de régularité qui existent pour le problème de l'obstacle : en effet, il est démontré que la régularité optimale pour un tel problème est aussi du type  $C^{1, \frac{1}{2}}$ , voir [12].

# Bibliographie

- [1] G. Alessandrini. Nodal lines of eigenfunctions of the fixed membrane problem in general convex domains. *Comment. Math. Helv.*, 69(1) :142–154, 1994.
- [2] G. Allaire and O. Pantz. Structural optimization with FreeFem++. *Struct. Multidiscip. Optim.*, 32(3) :173–181, 2006.
- [3] W.K. Allard. On the first variation of a varifold. *Ann. of Math. (2)*, 95 :417–491, 1972.
- [4] W.K. Allard. On the first variation of a varifold : boundary behavior. *Ann. of Math. (2)*, 101 :418–446, 1975.
- [5] H.W. Alt and L.A. Caffarelli. Existence and regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Reine Angew. Math.*, 325 :105–144, 1981.
- [6] H.W. Alt, L.A. Caffarelli, and A. Friedman. Variational problems with two phases and their free boundaries. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 282(2) :431–461, 1984.
- [7] F. Alter, V. Caselles, and A. Chambolle. Evolution of characteristic functions of convex sets in the plane by the minimizing total variation flow. *Interfaces Free Bound.*, 7(1) :29–53, 2005.
- [8] C.J.S. Alves and P.R.S. Antunes. The method of fundamental solutions applied to the calculation of eigenfrequencies and eigenmodes of 2d simply connected shapes. *Comp. Mat. Continua*, 2(4) :251–266, 2005.
- [9] H. Amann. *Ordinary differential equations*, volume 13 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 1990. An introduction to nonlinear analysis, Translated from the German by Gerhard Metzen.
- [10] L. Ambrosio and E. Paolini. Partial regularity for quasi minimizers of perimeter. *Ricerche Mat.*, 48(suppl.) :167–186, 1999. Papers in memory of Ennio De Giorgi (Italian).
- [11] D.E. Apushkinskaya and N.N. Ural'tseva. On the behavior of the free boundary near the boundary of the domain. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 221, 1995.
- [12] I. Athanasopoulos and L.A. Caffarelli. Optimal regularity of lower dimensional obstacle problems. *Zap. Nauchn. Sem. S.-Peterburg. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (POMI)*, 310, 2004.
- [13] E. Barozzi, E. Gonzalez, and U. Massari. The mean curvature of a Lipschitz continuous manifold. *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 14(4) :257–277 (2004), 2003.
- [14] T. Bayen. *Optimisation de formes dans la classe des corps de largeur constante et des rotors*. 2007. Thèse, Université de Paris 6.
- [15] G. Bellettini, V. Caselles, and M. Novaga. The total variation flow in  $\mathbb{R}^N$ . *J. Differential Equations*, 184(2) :475–525, 2002.
- [16] E. Bombieri, E. De Giorgi, and E. Giusti. Minimal cones and the Bernstein problem. *Invent. Math.*, 7 :243–268, 1969.
- [17] T. Briançon and J. Lamboley. Regularity of the optimal shape for the first eigenvalue of the laplacian with volume and inclusion constraints. *to appear in Annales de l'IHP, Analyse non linéaire*, 2008.
- [18] T. Briançon. *Problèmes de régularité en optimisation de formes*. 2002. Thèse, Université de Rennes 1.

- [19] T. Briançon. Regularity of optimal shapes for the Dirichlet's energy with volume constraint. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(1) :99–122 (electronic), 2004.
- [20] T. Briançon, M. Hayouni, and M. Pierre. Lipschitz continuity of state functions in some optimal shaping. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 23(1) :13–32, 2005.
- [21] F. Brock, V. Ferone, and B. Kawohl. A symmetry problem in the calculus of variations. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 4(6) :593–599, 1996.
- [22] D. Bucur. Concentration-compacité et  $\gamma$ -convergence. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(3) :255–258, 1998.
- [23] D. Bucur. Uniform concentration-compactness for Sobolev spaces on variable domains. *J. Differential Equations*, 162(2) :427–450, 2000.
- [24] D. Bucur. Regularity of optimal convex shapes. *J. Convex Anal.*, 10(2) :501–516, 2003.
- [25] D. Bucur. Do optimal shapes exist? *Milan J. Math.*, 75 :379–398, 2007.
- [26] D. Bucur, G. Buttazzo, and I. Figueiredo. On the attainable eigenvalues of the Laplace operator. *SIAM J. Math. Anal.*, 30(3) :527–536 (electronic), 1999.
- [27] D. Bucur and A. Henrot. Minimization of the third eigenvalue of the Dirichlet Laplacian. *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 456(1996) :985–996, 2000.
- [28] D. Bucur and J.-P. Zolésio. Anatomy of the shape Hessian via Lie brackets. *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 173 :127–143, 1997.
- [29] G. Buttazzo and G. Dal Maso. An existence result for a class of shape optimization problems. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 122(2) :183–195, 1993.
- [30] G. Buttazzo and P. Guasoni. Shape optimization problems over classes of convex domains. *J. Convex Anal.*, 4(2) :343–351, 1997.
- [31] L.A. Caffarelli, D. Jerison, and C.E. Kenig. Global energy minimizers for free boundary problems and full regularity in three dimensions. In *Noncompact problems at the intersection of geometry, analysis, and topology*, volume 350 of *Contemp. Math.*, pages 83–97. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2004.
- [32] L. Capogna, C.E. Kenig, and L. Lanzani. *Harmonic measure*, volume 35 of *University Lecture Series*. American Mathematical Society, Providence, RI, 2005. Geometric and analytic points of view.
- [33] G. Carlier. On a theorem of Alexandrov. *J. Nonlinear Convex Anal.*, 5(1) :49–58, 2004.
- [34] G. Carlier and T. Lachand-Robert. Convex bodies of optimal shape. *J. Convex Anal.*, 10(1) :265–273, 2003.
- [35] V. Caselles, A. Chambolle, and M. Novaga. Uniqueness of the Cheeger set of a convex body. *Pacific J. Math.*, 232(1) :77–90, 2007.
- [36] S. Chanillo and C.E. Kenig. Regularity of the minimizers in the composite membrane problem in  $\mathbb{R}^2$ . *Preprint*, 2008.
- [37] J. Cheeger. A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian. In *Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969)*, pages 195–199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [38] J. Choe. Sharp isoperimetric inequalities for stationary varifolds and area minimizing flat chains mod  $k$ . *Kodai Math. J.*, 19(2) :177–190, 1996.
- [39] A. Cianchi and N. Fusco. Steiner symmetric extremals in Pólya-Szegő type inequalities. *Adv. Math.*, 203(2) :673–728, 2006.
- [40] M. Costabel and M. Dauge. Un résultat de densité pour les équations de Maxwell régularisées dans un domaine lipschitzien. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 327(9) :849–854, 1998.
- [41] M. Crouzeix. Variational approach of a magnetic shaping problem. *European J. Mech. B Fluids*, 10(5) :527–536, 1991.
- [42] M. Crouzeix. Une famille d'inégalités pour les ensembles convexes du plan. *Ann. Math. Blaise Pascal*, 12(2) :223–230, 2005.

- [43] M. Crouzeix. Numerical range and functional calculus in Hilbert space. *J. Funct. Anal.*, 244(2) :668–690, 2007.
- [44] M. Crouzeix. A functional calculus based on the numerical range : applications. *Linear Multilinear Algebra*, 56(1-2) :81–103, 2008.
- [45] M. Dambrine and M. Pierre. About stability of equilibrium shapes. *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, 34(4) :811–834, 2000.
- [46] M. Dauge. *Elliptic boundary value problems on corner domains*, volume 1341 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1988. Smoothness and asymptotics of solutions.
- [47] M. Dauge. Strongly elliptic problems near cuspidal points and edges. In *Partial differential equations and functional analysis*, volume 22 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 93–110. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [48] R. Dautray and J.-L. Lions. *Analyse mathématique et calcul numérique pour les sciences et les techniques. Tome 2*. Masson, Paris, 1985.
- [49] D. De Silva and D. Jerison. A singular energy minimizing free boundary. *to appear in J. Reine Angew. Math.*, 2008.
- [50] M.C. Delfour and J.-P. Zolésio. Structure of shape derivatives for nonsmooth domains. *J. Funct. Anal.*, 104(1) :1–33, 1992.
- [51] M.C. Delfour and J.-P. Zolésio. *Shapes and geometries*, volume 4 of *Advances in Design and Control*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2001. Analysis, differential calculus, and optimization.
- [52] J. Descloux. A stability result for the magnetic shaping problem. *Z. Angew. Math. Phys.*, 45(4) :543–555, 1994.
- [53] L.C. Evans and R.F. Gariepy. *Measure theory and fine properties of functions*. Studies in Advanced Mathematics. CRC Press, Boca Raton, FL, 1992.
- [54] H. Federer. Curvature measures. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 93 :418–491, 1959.
- [55] H. Federer. *Geometric measure theory*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 153. Springer-Verlag New York Inc., New York, 1969.
- [56] I. Fragalà and F. Gazzola. Partially overdetermined problems. *J. Diff. Eq.*, 245 :1299–1322, 2008.
- [57] I. Fragalà, F. Gazzola, J. Lamboley, and M. Pierre. Counterexamples to symmetry for partially overdetermined elliptic problems. *to appear in International mathematical journal of analysis and its applications*, 2008.
- [58] J.B. Garnett and D.E. Marshall. *Harmonic measure*, volume 2 of *New Mathematical Monographs*. Cambridge University Press, Cambridge, 2005.
- [59] D. Gilbarg and N.S. Trudinger. *Elliptic partial differential equations of second order*. Classics in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2001. Reprint of the 1998 edition.
- [60] E. Giusti. *Minimal surfaces and functions of bounded variation*, volume 80 of *Monographs in Mathematics*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1984.
- [61] J.A. Glaunès. *Transport par difféomorphismes de points, de mesures et de courants pour la comparaison de formes et l'anatomie numérique*. 2005. Thèse de l'Université Paris 13.
- [62] E. Gonzalez, U. Massari, and I. Tamanini. On the regularity of boundaries of sets minimizing perimeter with a volume constraint. *Indiana Univ. Math. J.*, 32(1) :25–37, 1983.
- [63] A. Greco and B. Kawohl. On the convexity of some free boundaries. *Preprint*, 2008.
- [64] P. Grisvard. *Elliptic problems in nonsmooth domains*, volume 24 of *Monographs and Studies in Mathematics*. Pitman (Advanced Publishing Program), Boston, MA, 1985.
- [65] P. Grisvard. Problèmes aux limites dans des domaines avec points de rebroussement. In *Partial differential equations and functional analysis*, volume 22 of *Progr. Nonlinear Differential Equations Appl.*, pages 1–17. Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1996.
- [66] B. Gustafsson and H. Shahgholian. Existence and geometric properties of solutions of a free boundary problem in potential theory. *J. Reine Angew. Math.*, 473 :137–179, 1996.

- [67] J. Hadamard. Mémoire sur un problème d'analyse relatif à l'équilibre des plaques élastiques encastrées. *Œuvres de J. Hadamard, CNRS, Paris, 1968*, pages 515–642, 1908.
- [68] M. Hayouni. Sur la minimisation de la première valeur propre du laplacien. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 330(7) :551–556, 2000.
- [69] E. Hebey and N. Saintier. Stability and perturbations of the domain for the first eigenvalue of the 1-Laplacian. *Arch. Math. (Basel)*, 86(4) :340–351, 2006.
- [70] A. Henrot. *Extremum problems for eigenvalues of elliptic operators*. Frontiers in Mathematics. Birkhäuser Verlag, Basel, 2006.
- [71] A. Henrot and E. Oudet. Le stade ne minimise pas  $\lambda_2$  parmi les ouverts convexes du plan. *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, 332(5) :417–422, 2001.
- [72] A. Henrot and E. Oudet. Minimizing the second eigenvalue of the Laplace operator with Dirichlet boundary conditions. *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 169(1) :73–87, 2003.
- [73] A. Henrot and M. Pierre. *Variation et Optimisation de Formes*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, 2005. Une analyse géométrique.
- [74] A. Henrot, M. Pierre, and M. Rihani. Finite dimensional reduction for the positivity of some second shape derivatives. *Methods Appl. Anal.*, 10(3) :457–476, 2003.
- [75] A. Henrot, M. Pierre, and M. Rihani. Positivity of the shape Hessian and instability of some equilibrium shapes. *Mediterr. J. Math.*, 1(2) :195–214, 2004.
- [76] A.D. Ioffe and V.M. Tihomirov. *Theory of extremal problems*. 1979. Studies in Mathematics and its Applications.
- [77] A.L. Karakhanyan, C.E. Kenig, and H. Shahgholian. The behavior of the free boundary near the fixed boundary for a minimization problem. *Calc. Var. Partial Differential Equations*, 28(1) :15–31, 2007.
- [78] M. Kassmann and W.R. Madych. Difference quotients and elliptic mixed boundary value problems of second order. *Indiana Univ. Math. J.*, 56(3) :1047–1082, 2007.
- [79] B. Kawohl. *Rearrangements and convexity of level sets in PDE*, volume 1150 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1985.
- [80] B. Kawohl. Some nonconvex shape optimization problems. In *Optimal shape design (Tróia, 1998)*, volume 1740 of *Lecture Notes in Math.*, pages 7–46. Springer, Berlin, 2000.
- [81] B. Kawohl and V. Fridman. Isoperimetric estimates for the first eigenvalue of the  $p$ -Laplace operator and the Cheeger constant. *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 44(4) :659–667, 2003.
- [82] B. Kawohl and T. Lachand-Robert. Characterization of Cheeger sets for convex subsets of the plane. *Pacific J. Math.*, 225(1) :103–118, 2006.
- [83] D. Kinderlehrer and L. Nirenberg. Regularity in free boundary problems. *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci. (4)*, 4(2) :373–391, 1977.
- [84] Y. Komatu. On starlike and convex mappings of a circle. *Kōdai Math. Sem. Rep.*, 13 :123–126, 1961.
- [85] T. Lachand-Robert. *Minimization sous contraintes de convexité ou globales. Applications au problème de résistance minimale de Newton*. 2000. Habilitation.
- [86] T. Lachand-Robert and E. Oudet. Minimizing within convex bodies using a convex hull method. *SIAM J. Optim.*, 16(2) :368–379 (electronic), 2005.
- [87] T. Lachand-Robert and M.A. Peletier. An example of non-convex minimization and an application to Newton's problem of the body of least resistance. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 18(2) :179–198, 2001.
- [88] T. Lachand-Robert and M.A. Peletier. Newton's problem of the body of minimal resistance in the class of convex developable functions. *Math. Nachr.*, 226 :153–176, 2001.
- [89] J. Lamboley. About hölder-regularity of the optimal convex shape for  $\lambda_2$ . *in preparation*, 2008.
- [90] J. Lamboley and A. Novruzi. Polygons as optimal shapes with convexity constraint. *soumis*, 2008.

- [91] J. Lamboley and M. Pierre. Structure of shape derivatives around irregular domains and applications. *J. Convex Anal.*, 14(4) :807–822, 2007.
- [92] N. Landais. *Problèmes de régularité en Optimisation de Forme*. 2007. Thèse de l'ENS Cachan.
- [93] N. Landais. A regularity result in a shape optimization problem with perimeter. *J. Convex Anal.*, 14(4) :785–806, 2007.
- [94] D. Lanphier and J. Rosenhouse. Lower bounds on the Cheeger constants of highly connected regular graphs. *Congr. Numer.*, 173 :65–74, 2005. 36th Southeastern International Conference on Combinatorics, Graph Theory, and Computing.
- [95] M. Lanza de Cristoforis. A note on conformal representation in Sobolev spaces. *Complex Variables Theory Appl.*, 20(1-4) :121–133, 1992.
- [96] A. Laurain. Structure of shape derivatives in nonsmooth domains and applications. *Adv. Math. Sci. Appl.*, 15(1) :199–226, 2005.
- [97] A. Laurain. Domaines singulièrement perturbés en optimisation de formes. *Thèse de l'université H. Poincaré Nancy 1*, 2006.
- [98] P.-L. Lions. The concentration-compactness principle in the calculus of variations. The locally compact case. I. *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 1(2) :109–145, 1984.
- [99] A. Mannino. Some inequalities concerning starlike and convex functions. *Gen. Math.*, 12(1) :5–12, 2004.
- [100] A. Marx. Untersuchungen über schlichte Abbildungen. *Math. Ann.*, 107(1) :40–67, 1933.
- [101] N. Matevosyan. Tangential touch between free and fixed boundaries in a problem from superconductivity. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(7-9) :1205–1216, 2005.
- [102] H. Maurer and J. Zowe. First and second order necessary and sufficient optimality conditions for infinite-dimensional programming problems. *Mathematical Programming* 16, 1979.
- [103] V.G. Maz'ya and B.A. Plamenevskii. Estimates in  $L^p$  and in Hölder classes and the Miranda-Agmon maximum principle for solutions of elliptic boundary value problems in domains with singular points on the boundary. *Amer. Math. Soc. Transl. (2)*, 123 :1–56, 1984.
- [104] A.D. Melas. On the nodal line of the second eigenfunction of the Laplacian in  $\mathbf{R}^2$ . *J. Differential Geom.*, 35(1) :255–263, 1992.
- [105] D. Mitrea and I. Mitrea. On the Besov regularity of conformal maps and layer potentials on nonsmooth domains. *J. Funct. Anal.*, 201(2) :380–429, 2003.
- [106] I. Mitrea and M. Mitrea. The Poisson problem with mixed boundary conditions in Sobolev and Besov spaces in non-smooth domains. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 359(9) :4143–4182 (electronic), 2007.
- [107] J.-M. Morvan. *Generalized Curvatures*, volume 2 of *Geometry and Computing*. Springer, 2008.
- [108] F. Murat and J. Simon. Sur le contrôle par un domaine géométrique. Number 76015, pages 1–222. 1976.
- [109] A. Novruzzi and M. Pierre. Structure of shape derivatives. *J. Evol. Equ.*, 2(3) :365–382, 2002.
- [110] E. Oudet. *Quelques résultats en optimisation de forme et stabilisation*. Prépublication de l'Institut de Recherche Mathématique Avancée. 2002. Thèse, Université de Strasbourg I (Louis Pasteur).
- [111] E. Oudet. Numerical minimization of eigenmodes of a membrane with respect to the domain. *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 10(3) :315–330 (electronic), 2004.
- [112] C. Pommerenke. *Boundary behaviour of conformal maps*, volume 299 of *Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften [Fundamental Principles of Mathematical Sciences]*. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [113] J. Prajapat. Serrin's result for domains with a corner or cusp. *Duke Math. J.*, 91(1) :29–31, 1998.

- [114] L. Roques and F. Hamel. Mathematical analysis of the optimal habitat configurations for species persistence. *Math. Biosci.*, 210(1) :34–59, 2007.
- [115] G. Savaré. Regularity and perturbation results for mixed second order elliptic problems. *Comm. Partial Differential Equations*, 22(5-6) :869–899, 1997.
- [116] C. Scheid. *Analyse théorique et numérique au voisinage du point triple en électromouillage*, 2007. Thèse de l’Université J. Fourier.
- [117] C. Scheid and P. Witomski. A proof of the invariance of the contact angle in electrowetting. *Math. Comput. Model.*, 2008. to appear.
- [118] J. Serrin. A symmetry problem in potential theory. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 43 :304–318, 1971.
- [119] H. Shahgholian and N. Uraltseva. Regularity properties of a free boundary near contact points with the fixed boundary. *Duke Math. J.*, 116(1) :1–34, 2003.
- [120] H. Shahgholian and G.S. Weiss. The two-phase membrane problem—an intersection-comparison approach to the regularity at branch points. *Adv. Math.*, 205(2) :487–503, 2006.
- [121] E. Shamir. Regularization of mixed second-order elliptic problems. *Israel J. Math.*, 6 :150–168, 1968.
- [122] L. Simon. *Lectures on geometric measure theory*, volume 3 of *Proceedings of the Centre for Mathematical Analysis, Australian National University*. Australian National University Centre for Mathematical Analysis, Canberra, 1983.
- [123] J. Simons. Minimal varieties in riemannian manifolds. *Ann. of Math. (2)*, 88 :62–105, 1968.
- [124] J. Sokołowski and J.-P. Zolésio. *Introduction to shape optimization*, volume 16 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 1992. Shape sensitivity analysis.
- [125] G. Strang. Maximum area with Minkowski measures of perimeter. *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 138(1) :189–199, 2008.
- [126] E. Stredulinsky and W.P. Ziemer. Area minimizing sets subject to a volume constraint in a convex set. *J. Geom. Anal.*, 7(4) :653–677, 1997.
- [127] E. Strohäcker. Beiträge zur Theorie der schlichten Funktionen. *Math. Z.*, 37(1) :356–380, 1933.
- [128] V. Šverák. On optimal shape design. *J. Math. Pures Appl. (9)*, 72(6) :537–551, 1993.
- [129] N. Van Goethem. Variational problems on classes of convex domains. *Commun. Appl. Anal.*, 8(3) :353–371, 2004.
- [130] A.L. Vogel. Symmetry and regularity for general regions having a solution to certain over-determined boundary value problems. *Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena*, 40(2) :443–484, 1992.
- [131] A. Wagner. Optimal shape problems for eigenvalues. *Comm. Partial Differential Equations*, 30(7-9) :1039–1063, 2005.
- [132] S.E. Warschawski. On differentiability at the boundary in conformal mapping. *Proc. Amer. Math. Soc.*, 12 :614–620, 1961.
- [133] G.S. Weiss. Partial regularity for weak solutions of an elliptic free boundary problem. *Comm. Partial Differential Equations*, 23(3-4) :439–455, 1998.
- [134] G.S. Weiss. Partial regularity for a minimum problem with free boundary. *J. Geom. Anal.*, 9(2) :317–326, 1999.
- [135] N.M. Wigley. Schauder estimates in domains with corners. *Arch. Rational Mech. Anal.*, 104(3) :271–276, 1988.







## Résumé

Cette thèse s'inscrit dans le domaine des mathématiques appelé **Optimisation de forme**. Plus spécifiquement, on s'est attaché aux difficultés liées à l'écriture des conditions d'optimalité, et à leurs utilisations. Les deux obstacles majeurs qui ont été analysés sont les suivants :

- gérer des formes dont on ne connaît pas a priori la **régularité**,
- gérer des **contraintes géométriques fortes**, c'est-à-dire qui ne permettent que très peu de variations pour écrire l'optimalité (par exemple la **convexité**).

Les résultats obtenus sont décrits dans les quatre chapitres de cette thèse :

- le premier vise à établir un cadre de différentiation de forme valable pour des formes presque sans régularité a priori,
- le chapitre 2 s'attache à l'analyse des conditions d'optimalité sous contrainte de convexité, en dimension 2, et leurs applications à une classe de problèmes où les formes optimales sont nécessairement des polygones,
- le troisième chapitre se focalise sur deux problèmes classiques de l'optimisation de forme des valeurs propres du laplacien, qui montrent bien les deux types de difficultés évoquées ci-dessus. On y démontre des résultats de régularité, et aussi de non-régularité, des formes optimales pour ces problèmes ; on obtient des limites de régularité en  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$  qui sont nouvelles et optimales,
- le dernier chapitre est motivé par la question des problèmes elliptiques partiellement surdéterminés, et on construit des contre-exemples liés à l'optimisation de forme.

**Mots clefs :** Optimisation de forme, dérivées de forme, frontières libres, régularité, contrainte de convexité, théorie spectrale, EDP surdéterminées

## Abstract

This dissertation takes place in the mathematic field called **shape optimization**. More precisely, we focus on difficulties linked to the writing of optimality conditions, and how to use them. The two main obstacles that have been analysed are the following :

- to deal with shape whose **regularity** is a priori unknown,
- to deal with **strong geometrical constraints**, i.e. which allow very few variations in the writing of optimality (for example the **convexity**).

The results are described in the four chapters of the thesis :

- the first one aims at developping a framework of shape derivatives, well adapted for shapes with very poor regularity,
- the chapter 2 deals with the analysis of optimality conditions under convexity constraints, in dimension 2, and their applications to a class of problems whose solutions are necessarily polygons,
- the third one focuses on two classical problems of shape optimization for eigenvalues, which enlighten the difficulties previously mentionned. We prove some regularity results, and also non-regularity ones, of optimal shapes for these problems ; we get some maximal regularity in  $\mathcal{C}^{1,\frac{1}{2}}$ , which are new and sharp,
- the last chapter is motivated by the question of partially overdetermined problems, and we build some counter-examples linked with shape optimization.

**Keywords :** Shape optimization, shape derivatives, free boundary, regularity, convexity constraint, spectral theory, overdetermined PDE